

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

О ВЛИЯНИИ СБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ
РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ПОРЯДОК РОСТА
ОТОБРАЖАЮЩЕЙ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 V 1954)

Известная теорема Данжуа — Карлемана — Альфорса ((¹), п. 252 — 262) утверждает:

Мероморфная функция $w = f(z)$, отображающая плоскость $z \neq \infty$ на риманову поверхность F , имеющую n прямо критических точек, имеет порядок роста не ниже среднего типа порядка $n/2$. При этом в случае $n = 1$ поверхность предполагается распадающейся (это не будет специально оговариваться в дальнейшем), т. е. существует замкнутая жорданова кривая C такая, что над областями, на которые она делит w -плоскость, лежат по крайней мере два связанных бесконечнолистных куска F .

В ряде работ (²⁻⁶) (с их содержанием автор знаком лишь по рефератам) Тумура и Цудзи выделили из класса косвенно критических точек подкласс, для которого оставалась верной теорема Данжуа — Карлемана — Альфорса, однако установить, принадлежит ли данная критическая точка к этому подклассу, можно лишь построив конформное отображение всей римановой поверхности на конечную z -плоскость.

В настоящей заметке вводится класс критических точек (K -точки) более широкий, чем класс прямокритических точек, для которых все еще остается верной теорема Данжуа — Карлемана — Альфорса, причем для того, чтобы отнести критическую точку к K -точкам, надо рассмотреть лишь некоторую окрестность этой точки, что часто позволяет формулировать критерий в чисто геометрических терминах.

Пусть над a лежит критическая точка $\mathfrak{A}$. Отобразим ее ε -окрестность на F на некоторую ограниченную жордановыми дугами область D в ζ -плоскости при помощи функции $w = g(\zeta)$.

Используя теорему Харнака, можно получить следующее соотношение:

$$\ln \left| \frac{\varepsilon}{g(\zeta) - a} \right| = \sum_1^{\infty} G(\zeta, p_\nu) + h_\varepsilon(\zeta),$$

где $G(\zeta, p_\nu)$ — функции Грина в области D с полюсами в a -точках $g(\zeta)$, а $h(\zeta)$ — некоторая гармоническая функция, причем независимо от выбора $g(\zeta)$ и D или $h(\zeta) \equiv 0$ или $h(\zeta) > 0, \zeta \in D$.

Определение. Если для любой достаточно малой ε -окрестности критической точки $\mathfrak{A}$ $h_\varepsilon(z) > 0$, то $\mathfrak{A}$ называется K -точкой.

Нахождение K -точек облегчается следующими теоремами:

1) Если для некоторой ε -окрестности $|w - a| < \varepsilon$ $h_\varepsilon(\zeta) > 0$, то эта окрестность содержит не менее одной K -точки, лежащей над a .

2) Если ε -окрестность содержит ε_0 -окрестность и $h_{\varepsilon_0}(\zeta) > 0$, то $h_{\varepsilon}(\zeta) > 0$.

Тем же методом, как и теорема Данжуа — Карлемана — Альфорса, доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Мероморфная функция $w = f(z)$, отображающая плоскость $z \neq \infty$ на риманову поверхность, имеющую n K -точек, имеет порядок роста не ниже среднего типа порядка $\rho = n/2$.

Теорема 2. Если $\mathcal{A}$ является прямо критической точкой, то она является K -точкой.

Теорема 3. Если ε -окрестность $\mathcal{A}$ односвязна, то для того, чтобы $\mathcal{A}$ была K -точкой, необходимо и достаточно, чтобы при отображении ε -окрестности на $|\zeta| < 1$ $\varphi(\zeta) = \frac{g(\zeta) - a}{\varepsilon}$ не являлось произведением Бляшке.

В типичных случаях (например, для всех целых функций) при ε достаточно малых ε -окрестности односвязны и ограничены одной жордановой дугой. Тогда вопрос, является ли $\mathcal{A}$ K -точкой, сводится к определению, является ли $\varphi(\zeta)$ произведением Бляшке с нулями, сходящимися к одной точке.

При дополнительном ограничении, что все нули $\varphi(\zeta)$ вещественны, дадим в геометрических терминах необходимое и достаточное условие того, чтобы для данной односвязной римановой поверхности Φ , лежащей над единичным кругом, отображающая ее на $|\zeta| < 1$ функция $w = \varphi(\zeta)$ не являлась произведением Бляшке.

Можно показать, что поверхность Φ , соответствующая $\varphi(\zeta)$ с вещественными нулями, имеет следующее строение. Возьмем последовательность, состоящую из однолистных кружков $|w| < 1$ с разрезами от -1 до $b'_n < 0$ и от $b''_n > 0$ до $+1$ и n -листных кружков, получаемых из предыдущих преобразованием $w_1 = w^n$. Пусть длины разрезов на соседних экземплярах выбраны так, что каждый из них можно склеить вдоль одного разреза с предыдущим экземпляром, а вдоль другого — с последующим. В результате склеивания получим односвязную поверхность Φ . Она будет иметь алгебраические точки ветвления лишь над вещественной осью, причем порядка > 1 может иметь лишь над 0. Кратчайший асимптотический путь будет составлять ломаную, проходящую через эти точки ветвления, которая окажется проходящей через все нули. Перенумеруем все точки ветвления в порядке их расположения на листах Φ , считая n -кратную n раз. Пусть их модули $|b_i|$.

Теорема 4. Для того, чтобы Φ представляла окрестность K -точки, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{v=1}^{\infty} \min_{i \geq v} \left\{ \ln \frac{1}{|b_i|} \right\} < \infty. \quad (1)$$

Если продолжить симметрично римановы поверхности типа Φ через $|w| = 1$, получим полные поверхности $\tilde{\Phi}$. Чтобы отображающие этот класс римановых поверхностей мероморфные функции $w = f(z)$ были среднего типа первого порядка, требование, чтобы обе их критические точки были K -точками, не только достаточно, но и необходимо. Как видим, повышение порядка вызывается быстрым и равномерным сближением алгебраических точек ветвления, точная мера которого дается условием (1).

Если ε -окрестность точки $\mathcal{A}$ не односвязна, то ее отображение на область D часто трудно осуществить, поэтому полезно следующее достаточное условие. Присоединяя к ε -окрестности граничащие с ней связные

конечнолистные куски римановой поверхности F , получим односвязную ε -окрестность $\mathcal{U}$; пусть $w = \bar{g}(\zeta)$ отображает ее на $|\zeta| < 1$, $\bar{\varphi}(\zeta) = \frac{\bar{g}(\zeta) - a}{\varepsilon}$.

Теорема 5. Для того чтобы $\mathcal{U}$ была K -точкой, достаточно:

а) если $\bar{\varphi}(\zeta)$ — функция ограниченного вида, чтобы $\lim_{r \rightarrow 1} m\left(r, \frac{1}{\bar{\varphi}}\right) > 0$;

б) если $\bar{\varphi}(\zeta)$ — функция неограниченного вида, чтобы $\lim_{r \rightarrow 1} N\left(r, \frac{1}{\bar{\varphi}}\right) < \infty$ (обозначения см. (1)).

Если для некоторой ε -окрестности $\mathcal{U}$ $\bar{\varphi}(\zeta)$ — функция неограниченного вида и $\lim_{r \rightarrow 1} N\left(r, \frac{1}{\bar{\varphi}}\right) = \infty$ (назовем тогда $\mathcal{U}$ K' -точкой), то хотя и нельзя утверждать, что $\mathcal{U}$ является K -точкой, все же можно уточнить оценку порядка $f(z)$.

Теорема 6. Мероморфная функция $w = f(z)$, отображающая плоскость $z \neq \infty$ на риманову поверхность, имеющую n ($n \geq 0$) K -точек и по крайней мере одну K' -точку, имеет порядок роста $\rho \geq \frac{n+2}{2}$.

Поступило

1 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, 1941. ² Y. Tsumura, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 17, 65 (1941). ³ Y. Tsumura, ibid., 18, 606 (1942).
⁴ Y. Tsumura, ibid., 18, 612 (1942). ⁵ Y. Tsumura, Jap. J. Math., 18, 797 (1943).
⁶ M. Tsuji, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 18, 432 (1942).