

К. В. БОРОЗДИН

ОБ ОДНОМ ВОЗМОЖНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ХЕЙЛЬБРОННА — ЛАНДАУ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 VII 1954)

В работе ⁽¹⁾ доказано, что если имеется степенной ряд с радиусом сходимости 1, коэффициенты которого имеют конечную нижнюю грань, и если ряд этот в секторе $0 \leq r < 1$, $|\varphi| \leq \lambda$ представляет ограниченную функцию, то коэффициенты ряда имеют и конечную верхнюю грань.

В настоящей работе указанная теорема обобщается на тот случай, когда на ряд наложены менее жесткие условия.

Теорема. Пусть степенной ряд с действительными коэффициентами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

($z = re^{i\varphi}$; радиус сходимости 1) в области, граница которой в окрестности точки $z = 1$ дается уравнением $r = 1 - |\varphi|^\beta$ (где $\beta \geq 1$), имеет оценку:

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|1-z|^\alpha}\right), \quad 0 \leq \alpha < 1. \quad (2)$$

Тогда из возможности оценить коэффициенты ряда снизу

$$a_n \geq -\gamma n^\delta \quad (\gamma > 0; 0 \leq \delta < 1) \quad (3)$$

следует возможность оценить их и сверху

$$a_n < \Gamma n^{\delta + \frac{1}{\beta}},$$

где Γ — константа.

Доказательство. При $r = \text{const} < 1$ ряд равномерно сходится вдоль дуги $|\varphi| \leq \lambda \equiv \sqrt[\beta]{1-r}$.

В силу этого (при $z = re^{i\varphi}$):

$$I \equiv \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\varphi|}{\lambda}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) e^{-im\varphi} d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\varphi|}{\lambda}\right) e^{i(n-m)\varphi} d\varphi. \quad (4)$$

Элементарные выкладки дают

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\varphi|}{\lambda}\right) e^{i\varphi\varphi} d\varphi = \lambda \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda\varphi}{2}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$I = a_m r^{m\lambda} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{a_n r^{n\lambda} \sin^2\left(\frac{\lambda(n-m)}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda(n-m)}{2}\right)^2}. \quad (5)$$

В зависимости от соотношения между n и m аргумент при синусе в (5) может быть больше или меньше единицы. Применяя соответственно оценки $|\sin x| < 1$ и $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, получаем (с учетом (3)):

$$a_m r^{m\lambda} < I + \gamma^\lambda \sum_{\substack{n \neq m \\ |n-m| \leq \frac{2}{\lambda}}} n^\delta + \frac{4\gamma}{\lambda} \sum_{|n-m| > \frac{2}{\lambda}} \frac{n^\delta}{(n-m)^2}. \quad (6)$$

Оценим слагаемые в правой части (6):

$$\gamma^\lambda \sum_{\substack{n \neq m \\ |n-m| \leq \frac{2}{\lambda}}} n^\delta < 4\gamma \left(m + \left[\frac{2}{\lambda}\right]\right)^\delta. \quad (7)$$

Третье слагаемое в (6) приходится разбить на три части:

$$\frac{4\gamma}{\lambda} \sum_{0 \leq n < m - \left[\frac{2}{\lambda}\right]} \frac{n^\delta}{(n-m)^2} < \frac{4\gamma}{\lambda} m^\delta \sum_{g=\left[\frac{2}{\lambda}\right]}^{\infty} \frac{1}{g^2}.$$

Легко показать, что

$$\sum_{g=\left[\frac{2}{\lambda}\right]}^{\infty} \frac{1}{g^2} = O(\lambda).$$

Следовательно,

$$\frac{4\gamma}{\lambda} \sum_{0 \leq n < m - \left[\frac{2}{\lambda}\right]} \frac{n^\delta}{(n-m)^2} = O(m^\delta). \quad (8)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{4\gamma}{\lambda} \sum_{n > m + \left[\frac{2}{\lambda}\right]}^{\infty} \frac{n^\delta}{(n-m)^2} &= \frac{4\gamma}{\lambda} \sum_{h=\left[\frac{2}{\lambda}\right]+1}^{\infty} \frac{(m+k)^\delta}{k^2} = \\ &= \frac{4\gamma}{\lambda} \left\{ \sum_{h=\left[\frac{2}{\lambda}\right]+1}^m \frac{(m+k)^\delta}{k^2} + \sum_{h=m+1}^{\infty} \frac{(m+k)^\delta}{k^2} \right\}; \\ \sum_{h=\left[\frac{2}{\lambda}\right]+1}^{\infty} \frac{(m+k)^\delta}{k^2} &< (2m)^\delta \sum_{h=\left[\frac{2}{\lambda}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \lambda m^\delta; \\ \sum_{h=m+1}^{\infty} \frac{(m+k)^\delta}{k^2} &< 2^\delta \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^{2-\delta}} = \frac{2^\delta}{1-\delta} m^{\delta-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, (9) переходит в

$$\frac{4\gamma}{\lambda} \sum_{n > m + \left[\frac{2}{\lambda}\right]}^{\infty} \frac{n^\delta}{(n-m)^2} < 4\gamma m^\delta + \frac{8\gamma}{1-\delta} \frac{m^{\delta-1}}{\lambda}. \quad (10)$$

Оценим, наконец, I :

$$|I| \leq \int_{-\lambda}^{\lambda} |f(z)| d\varphi = \int_{-\lambda}^{\lambda} O\left(\frac{1}{|1-z|^{\alpha}}\right) d\varphi.$$

Как известно,

$$|1-z| \geq \sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi.$$

Так как $\alpha < 1$, то интеграл — сходящийся, и

$$|I| = O(1). \quad (11)$$

Соединяя воедино оценки (7), (8), (10) и (11), получаем из (6) (после необходимых упрощений)

$$a_m r^m \leq 4\gamma \left(m + \left[\frac{2}{\lambda}\right]\right)^{\delta} + O(m^{\delta}) + \frac{8\gamma}{1-\delta} \frac{m^{\delta-1}}{\lambda}. \quad (12)$$

Вспомним, что $\lambda \equiv \sqrt[\beta]{1-r}$, и положим $r = 1 - \frac{1}{m}$, тогда

$$a_m r^m \leq 12\gamma m^{(\delta+\frac{1}{\beta})} + O\left(m^{\delta+\frac{1}{\beta}}\right) + \frac{8\gamma}{1-\delta} m^{\delta-1+\frac{2}{\beta}}.$$

Так как $\beta \geq 1$, то

$$a_m = O\left(m^{\delta+\frac{1}{\beta}}\right), \quad (13)$$

что и требовалось доказать.

За постановку задачи благодарю А. Г. Постникова.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
6 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Heilbronn, E. Landau. Math. Zs., 37, 17 (1933).