

В. А. АТАНАСЯН

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОМЕРНЫХ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 7 VI 1954)

1. Пусть в плоском аффинном пространстве A_m задана n -мерная поверхность V_n при помощи векторной функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Поверхность V_n называется оснащенной, если с каждой ее точкой сопоставлена k -мерная ($k = m - n$) центроаффинная плоскость N_k , натянутая на векторы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$, в предположении, что векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ линейно независимы (где $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$). Поверхность V_n со множеством оснащающих плоскостей будем обозначать в дальнейшем через $V_n(N_k)$. Разлагая векторы $\mathbf{r}_{ij} = \partial \mathbf{r} / \partial x^i \partial x^j$ и $\mathbf{p}_{\kappa i} = \partial \mathbf{p}_\kappa / \partial x^i$ по реперу $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_\kappa$ *, получим:

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^h \mathbf{r}_h + h_{ij}^\kappa \mathbf{p}_\kappa, \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_{\kappa i} = \beta_{\kappa i}^h \mathbf{r}_h + \Gamma_{\kappa i}^\lambda \mathbf{p}_\lambda. \quad (2)$$

При переходе к новой координатной системе на поверхности V_n $x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и к новым оснащающим векторам $\mathbf{p}_{\kappa'} = \psi_\kappa^\lambda \mathbf{p}_\lambda$ величины $h_{ij}^\kappa, \beta_{\kappa i}^h, \Gamma_{ij}^h, \Gamma_{\kappa i}^\lambda$, индуцируемые на поверхности V_n оснащением N_k , изменяются по следующему закону:

$$h_{i'j'}^{\kappa'} = h_{ij}^\kappa \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{j'}} **,$$

$$\beta_{\kappa' i'}^{h'} = \beta_{\kappa i}^h \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}} \frac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}},$$

$$\Gamma_{i'j'}^{h'} = \Gamma_{ij}^h \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x'^{j'}} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^{i'} \partial x'^{j'}} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h},$$

$$\Gamma_{\kappa' i'}^{\lambda'} = \Gamma_{\kappa i}^\lambda \psi_{\kappa'}^\mu \psi_\lambda^\nu \frac{\partial x^i}{\partial x'^{i'}} + \frac{\partial \psi_{\kappa'}^\mu}{\partial x^h} \psi_\sigma^{\lambda'} \frac{\partial x^h}{\partial x'^{i'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma'}},$$

откуда следует, что величины h_{ij}^κ и $\beta_{\kappa i}^h$ можно рассматривать как тензоры некоторого составного многообразия $L_k(B_n)$, а Γ_{ij}^h и $\Gamma_{\kappa i}^\lambda$ — как коэффициенты связности этого составного многообразия (1). Если значком $|$ обозначить ковариантное дифференцирование относительно связности

* Здесь и в дальнейшем все латинские индексы $i, j, k, l, h, m, \dots$, пробегают значения от 1 до n , а все греческие $\kappa, \lambda, \sigma, \dots$ — от 1 до k .

** Величины $\psi_{\kappa'}^{\mu'}$ определяются из соотношений $\psi_{\kappa'}^{\mu'} \psi_\sigma^{\kappa'} = \delta_{\sigma'}^{\mu'}$.

Γ_{ij}^h и $\Gamma_{\lambda i}^*$, например $a_{xi|k}^h = \frac{\partial a_{xi}^h}{\partial x^k} - \Gamma_{xk}^\sigma a_{\sigma i}^h - \Gamma_{ik}^m a_{xm}^h + \Gamma_{ih}^l a_{xi}^l$, то условия интегрируемости основных уравнений (1) и (2) оснащенной поверхности $V_n(N_k)$ примут следующий вид:

$$h_{ij}^x \beta_{xk}^h = R_{ijk}^h, \quad (3)$$

$$h_{ij}^x|_k = 0, \quad (4)$$

$$\beta_{xi}^h|_k = 0, \quad (5)$$

$$h_{mj}^x \beta_{\lambda k}^m = R_{\lambda jk}^x, \quad (6)$$

где R_{ijk}^h — тензор кривизны: $R_{ijk}^h = \partial \Gamma_{ik}^h / \partial x^j + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^h$; $R_{\lambda jk}^x$ — тензор псевдокривизны или кручения поверхности: $R_{\lambda jk}^x = \partial \Gamma_{\lambda k}^x / \partial x^j + \Gamma_{\lambda k}^\sigma \Gamma_{\sigma j}^x$.

2. Пусть $V_n(N_k)$ и $V_n(\tilde{N}_k)$ — поверхность с двумя различными оснащениями. Имеет место следующая лемма:

Если поверхность V_n в каждой точке оснащена двумя различными плоскостями — плоскостью N_k с фиксированными координатными векторами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ и плоскостью $\tilde{N}_k$, то в плоскости $\tilde{N}_k$ всегда можно так выбрать координатные векторы $\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_k$, чтобы

$$\tilde{\mathbf{p}}_\lambda = \psi_\lambda^a \mathbf{r}_a + \mathbf{p}_\lambda. \quad (7)$$

При переходе оснащения N_k к оснащению $\tilde{N}_k$ величины $h_{ij}^x, \beta_{xi}^h, \Gamma_{ij}^h$ и $\Gamma_{\lambda i}^*$ изменяются следующим образом:

$$h_{ij}^x = \tilde{h}_{ij}^x, \quad \beta_{xi}^h = \tilde{\beta}_{xi}^h - \psi_{xi}^h|_j, \quad \Gamma_{ij}^h = \tilde{\Gamma}_{ij}^h + \psi_{xi}^h h_{ij}^x, \quad \Gamma_{\lambda i}^* = \tilde{\Gamma}_{\lambda i}^* - \psi_\lambda^m h_{mi}^x,$$

откуда, в частности, следует, что тензор h_{ij}^x не зависит от оснащения и целиком определяется поверхностью V_n .

Если для тензора h_{ij}^x отличен от нуля определитель T , определенным образом составленный из его компонент, то, как показал Вейзе⁽²⁾, можно однозначно определить тензор h_{xi}^j , взаимный тензору h_{ij}^x , т. е. такой, что имеют место следующие соотношения:

$$h_{ik}^x h_{\lambda}^{ik} = n \delta_{\lambda}^x, \quad h_{ik}^x h_x^{jk} = k \delta_i^j, \quad h_{ik}^x h_x^{ik} = nk.$$

Введем в рассмотрение определители:

$$F = |F_{\lambda i}^{xj}| = |n \delta_{\lambda}^x \delta_i^j - h_{im}^x h_{\lambda}^{mj}|,$$

$$E = |E_{\lambda i}^{xj}| = |n \cdot k \delta_{\lambda}^x \delta_i^j + 2 h_{im}^x h_{\lambda}^{ml} h_{in}^m h_{\sigma}^{nj}|,$$

$$B = |B_{\lambda i j}^{xkl}| = |n \delta_{\lambda}^x \delta_i^k \delta_j^l + h_{im}^x h_{\lambda}^{ml} \delta_j^k + h_{jb}^x h_{\lambda}^{bl} \delta_i^k|,$$

где в определителе F строки нумеруются индексами λ и i , а столбцы — индексами x и j , в определителе E — строки нумеруются индексами x и i , столбцы — индексами λ и j , в определителе B строки нумеруются индексами λ, i, j , столбцы — x, k, l . Относительно введенных выше определителей имеет место следующее предложение:

Определители F, E и B целиком определяются поверхностью и не зависят от выбора оснащающих плоскостей и параметризации на поверхности.

Тензор h_{ij}^x , для которого $T \neq 0, F \neq 0, E \neq 0$ и $B \neq 0$, назовем регулярным, тензор h_{ij}^x , для которого $T \neq 0$ и $E \neq 0$, назовем полурегулярным. Соответственно поверхность V_n назовем регу-

* Черточками обозначается удвоенное альтернирование по индексам, т. е. $a_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$.

лярной, если регулярен определяемый ею тензор h_{ij}^* , и полурегулярной, если определяемый ею тензор полурегулярен.

3. Одной из основных проблем геометрии аффинных поверхностей является проблема построения инвариантного оснащения, т. е. такого оснащения, которое целиком определяется самой поверхностью. Эта проблема для $V_2(N_1)$ впервые была решена Бляшке ⁽³⁾ в 1922 г.; позднее Вейзе ⁽²⁾, используя соприкасающиеся параболоиды, построил инвариантное оснащение $V_n(N_k)$ (с произвольными n и k). В 1950 г. А. М. Лопшицу ⁽⁴⁾ на новом пути удастся построить инвариантное оснащение $V_n(V_2)$, а В. Д. Измайлову ⁽⁵⁾ $V_2(N_k)$. Используя теорию составных многообразий, можно дать новую довольно простую схему построения инвариантного оснащения, которую мы приводим ниже.

Введем в рассмотрение тензор вида $p_\lambda^m = h_{ij|k}^* h_\lambda^{ij} h_k^{hm}$. При переходе к новому оснащению $\tilde{N}_k$ тензор p_λ^m изменится по следующему закону:

$$\tilde{p}_\lambda^m = p_\lambda^m + E_{\lambda k}^{\sigma m} \psi_\sigma^k. \quad (8)$$

Имеет место следующая теорема:

Если поверхность V_n , погруженная в A_m , полурегулярна, то тензор p_λ^m в каждой точке поверхности однозначно определяет оснащающую плоскость N_k .

Для доказательства выберем произвольное оснащение N_k с координатными векторами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ и подсчитаем для этого оснащения компоненты тензора p_λ^m и элементы определителя E . Зададимся затем произвольным тензором $\tilde{p}_\lambda^m$; тогда из соотношений (8) легко определяются величины ψ_σ^a , задающие переход от оснащения N_k к оснащению $\tilde{N}_k$, соответствующему тензору $\tilde{p}_\lambda^m$. Из соотношений (7) следует, что оснащение $\tilde{N}_k$ определяется тензором $\tilde{p}_\lambda^m$ однозначно.

Оснащение, для которого $p_\lambda^m = 0$, является инвариантным оснащением. Для этого конкретного построения необходимо выбрать произвольное оснащение N_k с координатными векторами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ и тензором p_λ^m , положив затем в соотношении (8) $\tilde{p}_\lambda^m = 0$, подсчитать ψ_σ^a , а затем из (7) определить векторы $\tilde{\mathbf{p}}_\lambda$, задающие инвариантное оснащение.

4. Исследование условий интегрируемости основных уравнений оснащенной поверхности $V_n(N_k)$ (3) — (6) привело к следующим результатам:

Если для поверхности V_n $T \neq 0$ и $B \neq 0$, то условие (5) является следствием условий Гаусса (3) и Кодаци (4).

Для доказательства условие (3) следует ковариантно продифференцировать по x^i и проциклировать полученное равенство по j, k и l . Используя затем обобщенное тождество Бьянки — Падова и условие Кодаци (4), будем иметь:

$$h_{ij}^* \beta_{\lambda k}^h | l + h_{ik}^* \beta_{\lambda j}^h | l + h_{il}^* \beta_{\lambda j}^h | k = 0. \quad (9)$$

Умножая последнее соотношение на $h_{\lambda i}^{*j}$ и свертывая по i и j , получим:

$$\beta_{\lambda i}^h | j B_{\lambda k l}^{*ij} = 0,$$

откуда, в силу того, что $B \neq 0$, $\beta_{\lambda i}^h | j = 0$.

Если для поверхности V_n $T \neq 0$ и $B \neq 0$, то условие Риччи (6) является следствием условий Гаусса и Кодаци.

В самом деле, ковариантно дифференцируя условие Кодаци, легко получить следующее условие:

$$h_{ij}^* | h l + h_{ik}^* | l j + h_{il}^* | j k = 0.$$

Воспользовавшись в последнем соотношении обобщенными тождествами Риччи и используя известное тождество $R_{jh}^h + R_{hl}^h + R_{ij}^h = 0$, получим:

$$h_{ij}^* R_{ihl}^h - h_{ij}^* R_{\lambda hl}^* + h_{hk}^* R_{ilj}^h - h_{ih}^* R_{\lambda lj}^* + h_{hl}^* R_{ijh}^h - h_{il}^* R_{\lambda jh}^* = 0.$$

Заменяя затем R_{ijh}^h из условия (3) через $h_{ij}^* \beta_{\lambda h}^h$, легко приходим к следующему соотношению типа (9):

$$h_{ij}^* (R_{\lambda hl}^* - h_{ah}^* \beta_{\lambda l}^a) + h_{ih}^* (R_{\lambda lj}^* - h_{al}^* \beta_{\lambda j}^a) + h_{al}^* (R_{\lambda jh}^* - h_{aj}^* \beta_{\lambda h}^a) = 0,$$

откуда, по аналогии, следует условие (6):

$$R_{\lambda hl}^* = h_{ah}^* \beta_{\lambda l}^a.$$

Совершенно очевидно, что для регулярных поверхностей условия (5) и (6) являются следствиями условий (3) и (4).

Если на поверхности V_n детерминанты T и F отличны от нуля, то величины $\beta_{\lambda i}^h$ и $\Gamma_{\lambda i}^*$ выражаются через h_{ij}^* и Γ_{ij}^h следующим образом:

$$\beta_{\lambda k}^h = R_{ijl}^h h_{\lambda}^{ij} \bar{F}_{\lambda k}^{*l}, \quad (10)$$

$$\Gamma_{\lambda k}^* = \left(\frac{\partial h_{ir}^*}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^m h_{mr}^* - \Gamma_{jr}^n h_{in}^* \right) h_{\lambda}^{ij} \bar{F}_{\lambda k}^{*r},$$

где $\bar{F}_{\lambda k}^{*r}$ — величины, взаимные элементам определителя F .

Эти предложения дают возможность следующим образом сформулировать основную теорему оснащенной поверхности $V_n(N_h)$:

Пусть регулярный тензор h_{ij}^* , симметричный относительно индексов i и j , и симметрическая связность Γ_{ij}^h удовлетворяют условиям:

$$h_{ij}^* \beta_{\lambda k}^h = R_{ijh}^*, \quad h_{ij}^* |_{\lambda} = 0, \quad h_{ij}^* |_{\lambda} h_{\lambda}^{ij} h_{\lambda}^{km} = 0,$$

где h_{λ}^{ij} — величины взаимные h_{ij}^* , а величины $\beta_{\lambda k}^h$ и $\Gamma_{\lambda k}^*$ определяются из условий (10) и (11). Тогда регулярный тензор h_{ij}^* и симметрическая связность Γ_{ij}^h определяют с точностью до аффинного преобразования пространства A_n поверхность V_n с оснащением N_h , которое для данной поверхности будет внутренним. При этом заданная связность и тензор h_{ij}^* совпадут с внутренней (инвариантной) связностью и внутренним h_{ij}^* поверхности V_n .

Поступило
27 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Вагнер, Тр. семинара по тензорн. и векторн. анализу, 8, 11 (1950).
- ² К. Н. Weise, Math. Zs., 43, 467 (1937); 44, 161 (1938). ³ W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2, Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923.
- ⁴ А. М. Лопшиц, Тр. семинара по тензорн. и векторн. анализу, 8, 286 (1950).
- ⁵ В. Д. Измайлов, ДАН, 85, № 3 (1952).