

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

КИНЕМАТИКА ПРЕДЕЛЬНО-КРУТЫХ ВОЛН

Гидродинамические исследования прошлого века установили, что отношение высоты морских волн h к их длине λ не может превышать некоторую предельную величину (0,143) без нарушения устойчивости движения. Одновременно было выяснено, что предельно-крутая волна обладает угловой точкой на вершине, близ которой почти прямолинейные склоны сходятся под углом 120° . Все эти выводы были получены формальным путем посредством анализа линий тока в системе, которой придано воображаемое движение со скоростью, равной скорости волн и направленной в противоположную сторону. Совсем не рассматривалось движение частиц воды относительно неподвижной системы координат.

В настоящее время возможно исследовать истинную картину движения, исходя из кинематических представлений, изложенных в одной из наших статей ⁽¹⁾. Там было доказано, что условия неразрывности порождают пульсацию поступательного движения вод, связанного с волнением. В отсутствие ветра колеблется на протяжении длины волны скорость w того слабого потока, который прежде считался постоянным. При ветре вместе с тем колеблется скорость u дрейфового течения, которая прежде тоже считалась постоянной.

Обозначив через v линейную скорость движения частиц по их круговым орбитам, можно записать на основании ⁽¹⁾ общее соотношение:

$$\frac{w+u}{v} = \left(\frac{r_0}{R} + \frac{\bar{u}}{v} \right) + \frac{r_0}{R} \left(1 + \frac{\bar{u}}{v} \right) \cos \theta, \quad (1)$$

в котором r_0 обозначает радиус орбиты поверхностной частицы, R — так называемый радиус круга качения, а θ — фазовый угол, отсчитываемый от нижней части координатной оси Y ; через $\bar{u}$ обозначена скорость дрейфового течения, осредненная во времени, за один период.

Если бы отсутствовали пульсации скоростей, то волна обладала бы формой трохлоиды, перемещающейся со скоростью c при штиле и со скоростью $c+u$ при наличии дрейфового течения. В действительности профиль волн описывается уравнениями

$$x = R\theta + a \sin \theta, \quad y = b \cos \theta, \quad (2)$$

в которых a и b представляют собой полуоси некоторого вспомогательного эллипса. Малая полуось b (вертикальная) равна r_0 , а большая a (горизонтальная) связана с ней общим соотношением:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_0}{R} \left(1 + \frac{\bar{u}}{v} \right). \quad (3)$$

Вершины волн заостряются тем более, чем больше отличается a от b . Воспользуемся уравнением (1) для построения профилей волн при различных частных значениях r_0/R и $\bar{u}/v$. При этом начнем с простейших случаев, соответствующих штилевым условиям: $\bar{u} = 0$.

Пусть $h/\lambda = 0,143$. Тогда, очевидно, $r_0/R = \pi h/\lambda = 0,45$ и, наконец, $\frac{\omega}{v} = 0,45(1 + \cos \theta)$.

На рис. 1 *a* слева вычерчена эпюра изменения скоростей. Масштаб выбран с таким расчетом, чтобы каждый вектор представлял путь, пройденный частицей в горизонтальном направлении за $1/24$ часть периода волны. В своем орбитальном движении частица опишет за тот же срок дугу, равную $1/24$ от окружности орбиты. В результате сложения движений водная частица последовательно окажется в тех

точках, которые обведены кружками на рис. 1 *a*, через отмеченные промежутки времени. Пунктирная кривая изображает истинную траекторию поверхностных частиц. За полпериода при изменении фазового угла от $\theta = \pi$ до $\theta = 2\pi$ частица проходит по этой траектории от своего верхнего положения на рис. 1 *a* до первого нижнего.

Так же просто строится и профиль волны. На основании (1) отметим на оси абсцисс точки, в которые приходит центр круговой

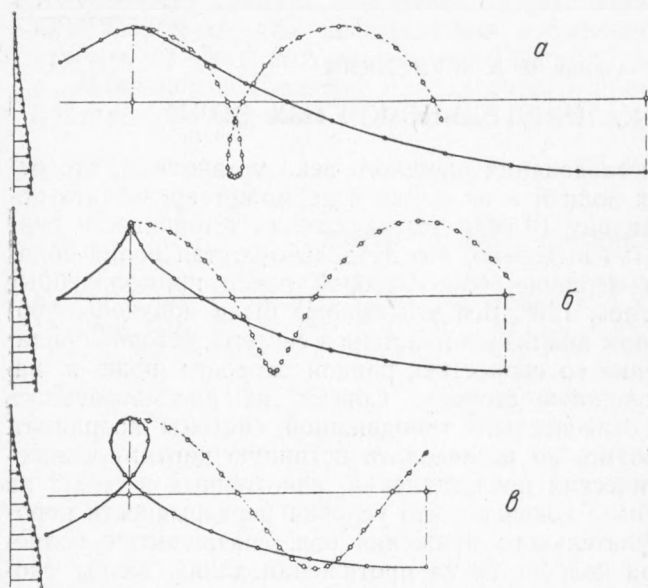


Рис. 1

орбиты в моменты, отделенные друг от друга промежутками времени $T/24$. При этом учтем изменения скорости переносного движения в соответствии с эпюрой рис. 1 *a* и отставание по фазе на дугу $2\pi/24$ в орбитальном движении при смещении вперед на каждый новый этап. В результате получим профиль волны, изображенный на рис. 1 *a* сплошной кривой. Как видим, он характеризуется прямолинейными очертаниями склонов на подходах к вершине, причем угол между прямыми равен 120° , в соответствии с точной формальной теорией. Неточность получилась у нас лишь у самой вершины, где отсутствует особая точка (угловая). Следует полагать, что эта неточность была бы устранена, если бы мы пожертвовали компактностью формул и удобством анализа соотношений и учли много членов при разложении в ряд логарифма, выводя формулу (9) в статье (1).

Было бы незаконно игнорировать неточность наших соотношений и стремиться к формальному получению угловой точки на вершине. Можно показать, что такая особая точка получилась бы при условии: $a = R$ и, соответственно, $r_0/R = 0,618$, $h/\lambda = 0,197$. Подобный вариант изображен на рис. 1 *б*, причем, как легко убедиться, здесь угол между касательными к склонам при вершине равен 0° . Этот формальный вариант столь же нереален, как была нереальна циклоида среди трохоидальных профилей.

Зато достаточно убедителен анализ последствий сверхмерного нарастания величины h/λ . Действительно, дадим этой величине заведомо завышенное значение. Например, положим: $h/\lambda = 0,25$ и, соответственно, $r_0/R = 0,785$. Тогда прежние приемы, основанные на уравнении (1), дадут профиль, изображенный на рис. 1 *в*. Эта схема выявляет причину разрушения вершин волн при переходе через предель-

ное значение величины h/λ : сложение орбитального и поступательного движения тут приводит к возникновению петли на кривой профиля волн, а при этом, разумеется, невозможно устойчивое движение частиц воды.

Столь же очевидно, что при вполне точном решении кинематической задачи такая петля получилась бы непосредственно при переходе через параметры, характеризовавшие случай рис. 1 а т. е. при $h/\lambda > 0,143$.

Вспомним теперь уравнение (1) из статьи (1), связывающее между собой a , λ и коэффициент κ , который характеризует заостренность

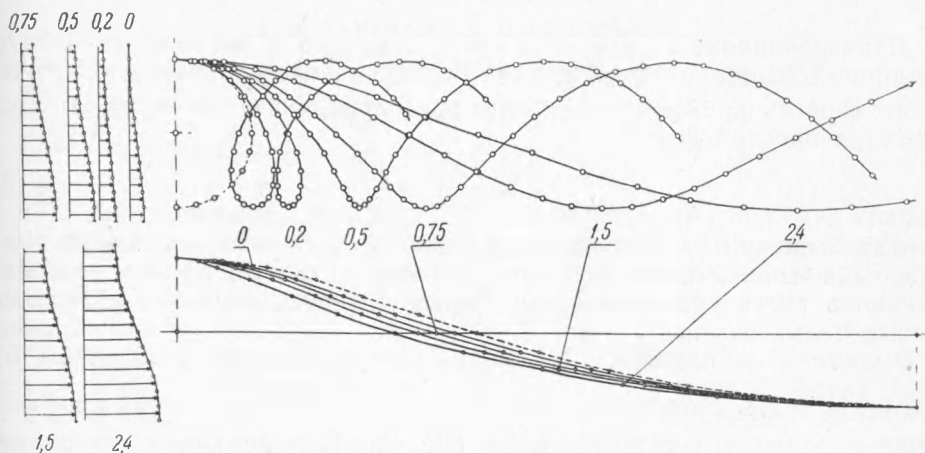


Рис. 2

вершин волн. Учтя при этом, что $R = \lambda/2\pi$, получим для предельно крутой волны (рис. 1 а) $a = 0,65 R$ вместо $a = R$, соответствовавшего формальному случаю рис. 1 б.

Таково кинематическое условие устойчивости волн.

Исследуем те выводы, которые вытекают из него в случае распространения волн ветровых. Докажем, что на ветру волны могут разрушаться при меньших значениях h/λ и при более тупых углах у вершин. Зададимся определенным значением величины h/λ , наблюдающимся в природе: $h/\lambda = 0,1$. В соответствии с этим будет: $r_0/R = 0,314$.

На рис. 2 построена серия траекторий поверхностных частиц на волне и серия профилей волн посредством прежнего метода, использующего общее уравнение (1). Слева изображены эпюры скоростей переносного движения, масштаб которых выбран, исходя из прежних соображений. Траектории частиц построены в верхнем ярусе чертежа, применительно к различным значениям осредненной скорости дрейфового течения: $\bar{u}/v = 0; 0,2; 0,5; 0,75; 1,5$ и $2,4$. Точки, обведенные кружками, попрежнему разделены промежутками времени $T/24$. Цифры, поставленные под траекториями, отмечают соответствующие значения $\bar{u}/v$. От тех же цифр проведены указатели к профилям волн, которые им отвечают. Для сравнения на рис. 2 нанесена пунктиром трохоида, построенная применительно к тому же значению $h/\lambda = 0,1$; ей соответствовала бы траектория в форме окружности, тоже нанесенной пунктиром на рис. 2.

Как видим, даже в отсутствие ветра ($\bar{u}/v = 0$) действительный профиль волн отличается от трохойды. При наличии ветра величина $\bar{u}/v$ возрастает по мере нарастания скорости ветра, создающего дрейфовое течение, при всех прочих равных условиях. В соответствии с этим все более и более заостряются вершины волн, изобра-

женных на рис. 2, как и следовало ожидать, на основании уравнения (3). Коэффициент κ последовательно принимает значения: 0,583; 0,53; 0,47 и 0,41, в то время как для трохойды он составлял 0,667.

Но ведь отсюда вытекает, что при некотором определенном значении $\bar{u}/v$ заостренность вершин должна оказаться критической, после которой невозможно устойчивое движение ветровой волны. Действительно, перепишем соотношение (3) в иной форме, также заимствованной из (1):

$$\frac{\bar{u}}{v} = \frac{R}{r_0} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) - 1. \quad (4)$$

Дадим величине a , входящей сюда, предельное значение $a = 0,65 R$, найденное выше, и учтем, что $b = r_0$. Тогда окажется, что критическая скорость дрейфового течения $\bar{u}_{кр}$ (осредненная за период) определяется простой формулой:

$$\left(\frac{\bar{u}}{v} \right)_{кр} = 0,65 \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 - \frac{R}{r_0} - 1. \quad (5)$$

При превышении этой скорости дрейфового течения на волнах должны были бы возникать неустойчивые образования типа схемы рис. 1 в. Именно в таких условиях на вершинах ветровых волн возникают пенные белые барашки.

В частном случае $h/\lambda = 0,1$, соответствующем рис. 2, формула (5) дает $\left(\frac{\bar{u}}{v} \right)_{кр} = 2,4$. Этому значению отвечает предельно крутой профиль ветровой волны, построенный на рис. 2. Так же как и на схеме рис. 1 а, здесь нет угловой точки на вершине из-за неточности наших формул. Однако попрежнему хорошо виден основной характер предельно крутой волны с ее прямолинейными склонами близ вершины. Угол между ними тут равен 140° .

Как уже отмечалось в (1), скорость $\bar{u}$, входящая в (4), а значит и в (5), превышает скорость собственно-дрейфового течения, поскольку на самой поверхности моря должен существовать тонкий слой, передающий воздействие трения от ветра слоям потенциального потока.

С другой стороны, возникновение барашков должно облегчаться еще тем, что по поверхности основных штормовых волн распространяются более крутые и короткие волны высоких порядков. Эти вторичные и третичные волны обладают меньшими значениями орбитальной скорости v и меньшими значениями R/r_0 , а потому, согласно (5), разрушаются в первую очередь.

Траектории частиц, изображенные на рис. 2, вполне соответствуют тем, которые были нами получены посредством фотографирования поплавков в бассейне. Отметим, что измерив разность L абсцисс максимума и минимума на траектории, легко вычислить осредненную скорость дрейфового течения по формуле:

$$\frac{\bar{u}}{v} = \frac{L}{\pi r_0} - \frac{r_0}{R}.$$

Это соотношение вытекает из уравнения (1) настоящей заметки.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
12 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Шулейкин, ДАН, 95, № 5 (1954).