

Академик Л. Д. ЛАНДАУ, А. А. АБРИКОСОВ и И. М. ХАЛАТНИКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГРИНОВСКОЙ ФУНКЦИИ ФОТОНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В предыдущих работах (^{1, 2}) нами были получены общие интегральные уравнения квантовой электродинамики нулевого приближения и найдены асимптотические выражения для электронной гриновской функции G и вершинной части Γ_μ . Теперь мы применим полученные результаты для нахождения фотонной гриновской функции $D_{\mu\nu}$.

Интеграл, стоящий в уравнении для $D_{\mu\nu}$ (6) (¹), при больших p расходуется в данном случае квадратично. Однако, поскольку значение интеграла при $k=0$ должно равняться нулю вследствие закона сохранения заряда (поперечность дираковского тока), мы должны рассматривать лишь разности между этим интегралом и его значением при $k=0$. Учитывая, что члены, содержащие в знаменателе p^3 , дают нуль, при усреднении мы придем опять к интегралу логарифмического типа. Поскольку область $p \ll k$, как легко видеть, ничего существенного в интеграле не дает, нам достаточно рассматривать область $p \gg k$.

При вычислении логарифмического интеграла необходимо, разумеется, наподобие того, как это делалось в предыдущей работе, учесть в $\Gamma_\mu(p, p-k; k)$ добавки второго порядка по k/p . Для нахождения этих добавок воспользуемся уравнением для Γ_σ (1) (¹), причем в стоящем здесь интеграле перейдем от переменной интегрирования k к переменной $k' = p - k$. Тогда он примет форму

$$\int D_{\mu\nu}(p-k') \Gamma_\mu(p, k'; p-k') G(k') \Gamma_\sigma(k', k'-l; l) G(k'-l) \times \\ \times \Gamma_\nu(k'-l, p-l; k'-p) d^4k.$$

Здесь считается $p \gg l$. Очевидно, что от разложения $G(k'-l)$ по степеням l/k' , действительно, возникают члены второго порядка по l , приводящие к интегралу, логарифмическому в области $p \gg k' \gg l$. Членов первого порядка по l не может возникнуть, так как они содержат в знаменателе k'^3 и исчезают при интегрировании по углам. Члены рассматриваемого типа могут возникать как от $G(k'-l)$, так и от $\Gamma_\sigma(k', k'-l; l)$. Зависимость от l в последнем Γ_ν дает члены не порядка l^2/k'^2 , а порядка l^2/p^2 , которыми можно пренебречь.

Мы начнем с вычисления добавок, возникающих от $G(k'-l)$. В результате вычислений находим искомое выражение:

$$\frac{e^2}{24\pi} \left\{ 2d_l(\xi) \frac{\hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} - l^2 \gamma_\sigma}{p^3} + [d_l(\xi) - d_t(\xi)] \frac{l^2 \hat{p} \gamma_\sigma \hat{p} - \hat{p} \hat{l} \gamma_\sigma \hat{l} \hat{p}}{p^4} \right\} \alpha^2(\xi) \times \\ \times \int_{\eta}^{\xi} \alpha(z) \beta^2(z) dz. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } \xi = \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right), \quad \eta = \ln\left(-\frac{l^2}{m^2}\right).$$

Оказывается, что достаточно искать поправку к $\Gamma_\sigma(p, p-l; l)$ в виде:

$$s(\xi, \eta) \alpha^2(\xi) \left\{ 2d_l(\xi) \frac{\hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} - l^2 \gamma_\sigma}{p^2} + [d_l(\xi) - d_t(\xi)] \frac{l^2 \hat{p}\gamma_\sigma \hat{p} - \hat{p} \hat{l}\gamma_\sigma \hat{l} \hat{p}}{p^4} \right\}. \quad (2)$$

Подставив это выражение в интеграл и сравнивая члены в левой и правой частях уравнения для Γ_σ (1) (1), получаем уравнение для $s(\xi, \eta)$:

$$s(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{4\pi} \int_\eta^\xi \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) s(z, \eta) dz + \frac{e_1^2}{24\pi} \int_\eta^\xi \alpha(z) \beta^2(z) dz. \quad (3)$$

Подставляя выражение (2) для добавки к Γ_σ в уравнение для $D_{\mu\nu}$ (6) (1), получаем

$$d_t(\eta) = 1 - 8 d_l(\eta) \left[\frac{e_1^2}{4\pi} \int_\eta^L \alpha^2(z) \beta^2(z) d_l(z) s(z, \eta) dz + \frac{e_1^2}{24\pi} \int_\eta^L \alpha(z) \beta^2(z) dz \right]. \quad (4)$$

Через L здесь обозначен верхний предел рассматриваемых нами значений величины η , который определяется радиусом «размазывания» взаимодействия. Согласно принятой нами схеме «размазанного взаимодействия», величина взаимодействия должна быстро падать, когда импульс превышает критическую величину $P \sim 1/a$, где a — радиус взаимодействия. Условие $p \gg P$ переходит в логарифмической шкале просто в условие $\xi > L$, где $L = \ln(-P^2/m^2)$, поскольку значительное изменение величины p соответствует относительно ничтожным изменениям $\ln(-p^2/m^2)$. Поэтому факт размазывания приводит к тому, что все интегралы, связанные с взаимодействием, должны браться до верхнего предела L . Подчеркнем, что, согласно основной схеме, константа e_1 является в действительности функцией «радиуса размазывания» a , т. е. величины L . При вычислении функций G и Γ_μ (2) нам не было необходимости пользоваться размазыванием, поскольку там расходимость определялась функцией $d_l(\xi)$ произвольной, а не связанной с характером взаимодействия. Однако, если мы вводим размазывание, мы должны автоматически и в интегралах, стоящих в показателях α и β , поставить верхний предел L вместо бесконечности.

Отметим, что при этом $\beta(L) = 1$. Это соответствует тому очевидному обстоятельству, что при импульсах $p \gg P$ взаимодействие исчезает и электрон должен вести себя как свободный, не взаимодействующий с полем.

Сравнивая формулу (4) с формулой (3), получаем:

$$\frac{1}{d_t(\eta)} = 1 + 8s(L, \eta). \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (3) по ξ и учитывая соотношения $\alpha = \frac{1}{\beta}$ и $\frac{d\beta(\xi)}{d\xi} = \frac{e_1^2}{4\pi} d_l(\xi) \beta(\xi)$ (2), получаем

$$\frac{\partial s(\xi, \eta)}{\partial \xi} = s(\xi, \eta) \frac{1}{\beta(\xi)} \frac{d\beta(\xi)}{d\xi} + \frac{e_1^2}{24\pi} \beta(\xi), \quad (6)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{s(\xi, \eta)}{\beta(\xi)} \right) = \frac{e_1^2}{24\pi},$$

и, учитывая, что при $\xi = \eta$ $s = 0$, согласно (3),

$$s(\xi, \eta) = \frac{e_1^2}{24\pi} (\xi - \eta) \beta(\xi). \quad (7)$$

Подставляя сюда $\xi = L$ и учитывая $\beta(L) = 1$, получаем окончательно из (5):

$$d_i(\eta) = \frac{1}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} L - \frac{e_1^2}{3\pi} \eta}. \quad (8)$$

Отметим, что это выражение, в отличие от выражений для G и Γ_μ не содержит произвольной функции d_i , как это и требуется градиентной инвариантностью.

Эта формула применима при $|k^2| \gtrsim m^2$. При $k^2 \sim m^2$ она дает

$$d_i^0 = \frac{1}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} L}. \quad (9)$$

Поскольку при k малых по сравнению с m интегрирование ведется не по $p \gg k$, а по $p \gg m$, формула (9) имеет место и для $k \ll m$, в частности и для $k \rightarrow 0$.

Теперь мы можем найти связь между константой e_1 и истинным зарядом электрона. Для этого рассмотрим, например, рассеяние электрона на электроне. Оно изображается диаграммой на рис. 1. Свободные концы соответствуют $p^2 = m^2$. Для того чтобы мы могли применять полученные нами формулы для Γ_μ ⁽²⁾, необходимо, чтобы и импульс фотона на фотонной линии не был очень велик по сравнению с m . При этом можно пренебречь η в знаменателе формулы (8), т. е. заменить d_i на d_i^0 . Согласно Дайсону ⁽³⁾, каждому свободному концу соответствует дополнительное умножение на $\sqrt{\lim_{p^2 \rightarrow m^2} (\hat{p} - m) G(p)}$, в нашем случае

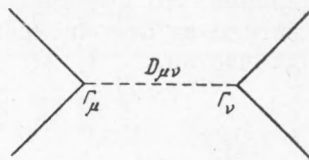


Рис. 1

равный $\sqrt{\beta(\xi = 0)}$.

Учитывая, что диаграмма на рис. 1 содержит 4 электронных свободных конца, две вершины и одну фотонную линию, легко видеть, что в результате мы получим для амплитуды рассеяния обычную формулу, где вместо квадрата заряда будет стоять произведение $e_1^2 \alpha^2(0) \beta^2(0) d_i^0$. Подставляя соответствующие выражения, получаем окончательно

$$e^2 = \frac{e_1^2}{1 + \frac{e_1^2}{3\pi} L}.$$

Разумеется, та же формула получается и из рассмотрения любого другого эффекта. Она, как и следовало, удовлетворяет требованию градиентной инвариантности. Выражая e_1^2 через e^2 , имеем

$$e_1^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} L}. \quad (10)$$

Из этой формулы видно, что при заданном e^2 значение e_1^2 растет с увеличением L и становится порядка единицы при значениях L , близких к $3\pi/e^2$. Поскольку наши основные уравнения выведены в предположении $e_1^2 \ll 1$, наши формулы (в том числе и формула (10)) перестают

быть применимыми при $L > 3\pi/e^2$. Это означает, что вся рассматриваемая теория применима лишь при $\xi < 3\pi/e^2$, и рассмотрение меньших размеров и больших энергий с ее помощью невозможно.

В действительности предлагаемая теория становится неприменимой значительно раньше из-за гравитации. Гравитационное взаимодействие становится порядка электромагнитного при $p^2 \sim e^2/K$ (K — гравитационная постоянная). Это соответствует $p \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ г} \sim 10^{27} \text{ эв}$ и $L \sim 100$.

Формула для d_t может быть теперь написана в виде

$$d_t(k^2) = \frac{e^2}{e_1^2} \frac{1}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right)} \quad (11)$$

при $k > m$). С точностью до «перенормировочного» множителя d_t оказывается, как и следовало, не зависящим от радиуса «размазывания».

При выводе формулы (11) было существенно то, что мы не рассматривали никаких других заряженных частиц, кроме электронов. По отношению к частицам, сильно взаимодействующим с неэлектромагнитными полями (π -мезоны, нуклоны), такое пренебрежение, несомненно, оправдано, поскольку они, благодаря специфическим взаимодействиям, получают конечный «радиус», и взаимодействие их с электромагнитным полем убывает с увеличением волнового вектора быстрее, чем это имеет место в формуле (11).

С другой стороны, возможно, что в природе существуют частицы, не способные к сильным взаимодействиям (μ -мезоны?). В этом случае в знаменателе формулы для d_t вместо второго члена будет стоять сумма аналогичных выражений для разных сортов частиц. Поскольку произведение $e^2/3\pi$ на логарифмы отношения масс есть всегда малая величина, это практически сведется к умножению второго члена в знаменателе на целочисленный множитель, равный числу сортов такого рода частиц.

Поступило
25 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 3 (1954). ² Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН, 95, № 4 (1954). ³ F. J. Dyson, Phys. Rev., 75, 1736 (1949).