

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. КИСЕЛЕВ и О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

**О РЕШЕНИИ ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО
НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 II 1954)

Указанному в заглавии работы вопросу посвящен ряд исследований⁽¹⁻⁵⁾ (см. также^(6,7)). Во всех этих работах для решения задачи используется фундаментальный сигнулярный тензор, при помощи которого задача сводится к исследованию интегральных уравнений, подобно тому как это делается в теории потенциала. Мы решаем ее при помощи разложения по собственным элементам соответствующего задаче дифференциального оператора. Кроме того, исследуем поведение решения при $t \rightarrow \infty$. Исследования решения при $t \rightarrow \infty$ для внешней задачи были проведены лишь в задачах обтекания круга и сферы с использованием представления решения через специальные функции^(8,9).

Мы рассматриваем две задачи: 1) движение в односвязной конечной области и 2) обтекание конечной области, считая известным начальное распределение скоростей $\mathbf{v}_0$ и значение $\mathbf{v}$ на границе области. Как известно, эти задачи могут быть сведены к определению одной функции $\psi(x_1, x_2, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$L\psi \equiv \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \Delta^2 \psi = 0 \quad *, \quad (1)$$

начальному условию

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\psi|_s = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_s = 0. \quad (3)$$

Во второй задаче требуется еще «выравнивание потока на ∞ », т. е. $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_\infty = (a, b)$ при $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$. Это накладывает на ψ условие, чтобы при $r \rightarrow \infty$ ψ стремилось к функции $-bx_1 + ax_2$. Ниже будет детализировано, в каком смысле принимается это предельное значение на бесконечности.

Наконец, заметим, что по функции ψ мы должны будем в дальнейшем определить давление из соотношения $\text{grad } p = \Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}_t$ как однозначную функцию (X, t) . Для этого надо, чтобы для любого замкнутого контура l , лежащего в нашей области,

$$\oint_l \left(\frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} - \frac{\partial \psi_t}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (4)$$

где $\partial/\partial n$ — дифференцирование по нормали к l .

* Мы ограничились здесь однородным уравнением лишь ради краткости изложения.

Решение задачи (1), (2), (3) для конечной области ищем в виде ряда Фурье

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(X), \quad (5)$$

где φ_k — все собственные функции уравнения

$$\Delta^2 \varphi_k = -\lambda_k \Delta \varphi_k \quad (6)$$

с граничными условиями (3). Нахождение системы функции φ_k , установление ее полноты, доказательство положительности всех λ_k проще всего получить, исходя из задачи об определении минимума функционала

$$(\Delta \varphi, \Delta \varphi) \equiv \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \varphi_{x_i x_j}^2 d\Omega \quad (7)$$

среди функций, подчиненных условиям (3) и условию

$$\|\varphi\|^2 \equiv [\varphi, \varphi] = \int_{\Omega} \text{grad}^2 \varphi d\Omega = 1. \quad (8)$$

Система φ_k будет полна в пространстве функции $\dot{D}(\Omega)$ с нормой (8) и в пространстве H_{Δ} функций, подчиненных условиям (3), с нормой (7). Доказывается, что определяемые из вариационной задачи функции φ_k имеют внутри Ω производные всех порядков, удовлетворяют уравнению (6), принадлежат пространству $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяют условиям (3).

Коэффициенты c_k в ряде (5) равны

$$c_k = [\psi_0, \varphi_k], \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq [\psi_0, \psi_0].$$

Если $\psi_0 \in \dot{D}(\Omega)$, то ряд (5) и ряды, полученные его почленным дифференцированием по x_i и t любое число раз, сходятся равномерно в цилиндре $Q' = \Omega' \times [\varepsilon, T]$, где $\varepsilon > 0$, а Ω' — любая внутренняя подобласть Ω . Начальное же значение ψ_0 принимается «в среднем» — в норме (8). Далее, при $t > 0$ ряд (5) сходится в норме (7), и потому сумма его удовлетворяет (3). Если потребуем, например, чтобы $\psi_0 \in H_{\Delta}$, то ряд (5) будет сходиться в норме (7) при любом $t \geq 0$ (это гарантирует равномерную сходимость ряда в Q).

Условие (4) будет выполняться при $t > 0$, так как наша область Ω односвязна и

$$0 = \int_{\Omega_t} (\Delta \psi_t - \Delta^2 \psi) d\Omega = \int_l \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial n} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial n} \right) dS,$$

где Ω_t — часть Ω , ограниченная l . Наконец, из ряда (5) видно, что при $t \rightarrow \infty$ $\psi \rightarrow 0$ по крайней мере как $e^{-\lambda_1 t}$. Нетрудно сформулировать теоремы единственности в различных функциональных классах.

Переходим ко второй задаче, являющейся для нас основным объектом исследования. Потребуем, чтобы ψ_0 имела обобщенные производные до четвертого порядка, квадратично суммируемые в любой конечной части Ω , удовлетворяла бы условиям (3) и условиям

$$\Delta \psi_0|_S = \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n}|_S = \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n}|_{c_n} = 0, \quad (9)$$

где C_n — последовательность безгранично расширяющихся гладких кривых, и чтобы интегралы

$$(\Delta\psi_0, \Delta\psi_0), \quad [\Delta\psi_0, \Delta\psi_0], \quad (\Delta^2\psi_0, \Delta^2\psi_0)$$

были конечны*. Решение задачи (1), (2), (3) ищем в виде $\psi = u + \psi_0$. Тогда для определения u имеем:

$$Lu = \Delta^2\psi_0, \quad (1')$$

условия (3) и

$$u|_{t=0} = 0. \quad (2')$$

Это решение и будем искать в классе F функций $v(X, t)$, обладающих следующими свойствами: они имеют обобщенные производные до второго порядка, причем сами функции v и v_t квадратично суммируемы по $Q_1 = \Omega_1 \times [0, T]$, где Ω_1 — любая конечная часть Ω ; v_{x_i} , $v_{x_i x_j}$ и $v_{x_i t}$ квадратично суммируемы по $Q = \Omega \times [0, T]$; на границе $S \times [0, T]$ они удовлетворяют условиям (3). Искомое обобщенное решение u должно принадлежать классу F , удовлетворять условию (2') и интегральному тождеству

$$\int_0^T \{[u_t, \Phi] + (\Delta u + \Delta\psi_0, \Delta\Phi)\} dt = 0 \quad (10)$$

для любой $\Phi \in F$.

Интегральное тождество (10) заменяет уравнение (1'). При наложенных выше ограничениях на ψ_0 функция u будет обладать производными по x_i четвертого порядка и производными $n_{x_i x_j t}$, квадратично суммируемыми по Q' , так что из (10) будет следовать для u справедливость равенства (1').

Имеет место теорема единственности обобщенного решения. Действительно, положив в (10) $\Phi = u$ и $\psi_0 \equiv 0$, получим

$$\int_0^T \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [u, u] + (\Delta u, \Delta u) \right\} dt = 0,$$

откуда $u_{x_i} \equiv 0$ и, в силу (3), $u \equiv 0$.

Обобщенное решение u мы найдем как предел при $n \rightarrow \infty$ решений u_n уравнения (1'), определяемых в $Q_n = \Omega_n \times [0, T]$, где Ω_n есть часть Ω , заключенная внутри C_n . На S u_n подчинены условиям (3), на C_n они должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} \Big|_{C_n} = \frac{\partial \Delta u_n}{\partial n} \Big|_{C_n} = 0, \quad (11)$$

а при $t = 0$ $u_n = 0$.

Функции u_n найдем в виде ряда Фурье

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{k,n} \frac{1 - e^{-\lambda_{k,n} t}}{\lambda_{k,n}} \varphi_{k,n},$$

* Все эти условия на ψ_0 выполняются, например, в том практически важном случае, когда $v_0 = \text{const}$ для достаточно больших r и вблизи S .

где $\varphi_{k,n}$ удовлетворяют (6), (3), (11), а $\beta_{k,n} = -(\Delta^2 \psi_0, \varphi_{k,n})$. Для всех u_n устанавливаются неравенства

$$\int_0^T \int_{\Omega_n} \text{grad}^2 u_n d\Omega \leq \int_0^T dt \int_0^t (\Delta \psi_0, \Delta \psi_0) dt,$$

(12)

$$\begin{aligned} \int_1^T \int_{\Omega_n} \{(\Delta u_n)^2 + (\Delta u_{nt})^2 + \text{grad}^2 u_{nt} + (\Delta^2 u_n)^2\} d\Omega dt &\leq \\ &\leq \int_0^T \{(\Delta \psi_0, \Delta \psi_0) + [\Delta \psi_0, \Delta \psi_0] + 2(\Delta^2 \psi_0, \Delta^2 \psi_0)\} dt. \end{aligned}$$

Из этих неравенств выводятся необходимые оценки для производных u_n до четвертого порядка, которые позволяют утверждать существование подпоследовательности u_{n_k} , сходящейся в соответствующих нормах к некоторой функции u . Доказывается, что u есть искомого обобщенное решение*.

Заметим, что тождество (10) устанавливается сначала для функций Φ , равных нулю вблизи S и постоянных для больших r . Доказав затем, что множество таких функций плотно в $\overset{0}{D}(\Omega)$ в норме (8), устанавливаем справедливость (10) для всех $\Phi \in F$. Вследствие выбора граничных условий (11) полученное решение u определяет функцию $\psi = u + \psi_0$, удовлетворяющую всем условиям задачи, в том числе и условию (4).

Если мы потребуем, чтобы $[\psi_0, \psi_0] < \infty$, то из тождества (10) можем получить

$$\frac{1}{2} [\psi, \psi]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \psi_{x_i x_j}^2 d\Omega dt = 0,$$

откуда, вспоминая условия (3), уже нетрудно сделать вывод о стремлении ψ к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Ленинградский государственный
педагогический институт

Поступило
31 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ C. W. Oseen, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927. ² F. K. G. Odqvist, *Math. Zs.*, **32**, 329 (1930). ³ F. K. G. Odqvist, *Ark. f. matem., astron. och. fysik*, **22** A, No. 28 (1930—1932). ⁴ J. Leray, *J. de math. pures et appl.*, **12**, Fasc. 1 (1933). ⁵ J. Leray, *ibid.*, **12**, Fasc. 4 (1934). ⁶ Д. Е. Долидзе, *Прикладн. мат. и мех.*, **11**, № 2 (1947). ⁷ Д. Е. Долидзе, там же, **12**, № 2 (1948). ⁸ Б. В. Русанов, *ДАН*, **89**, № 6 (1953). ⁹ Б. В. Русанов, *ДАН*, **90**, № 1 (1953).

* В силу единственности обобщенного решения вся последовательность u_n сходится к u .