

С. В. ЯБЛОНСКИЙ

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ
В ТРЕХЗНАЧНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 29 I 1954)

В алгебре логики изучаются функции, определенные на множестве из двух элементов и принимающие значения на этом же множестве. Одним из важнейших вопросов алгебры логики является вопрос о возможности сведения изучения сложных функций к изучению стандартных «элементарных» функций, т. е. о возможности представления сложных функций посредством суперпозиций (взятое конечное число раз функций от функций и замен переменных) «элементарных» функций.

В работе ⁽¹⁾ Пост рассматривает замкнутые относительно применения операции суперпозиции классы функций и попутно выясняет, каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять система функций алгебры логики, чтобы из нее можно было получить любую функцию алгебры логики (проблема полноты). Не зная работы Поста, автор ⁽²⁾ получил из других соображений решение этой проблемы.

Подобный круг задач возникает для функций, определенных на множестве из k элементов и принимающих значения на этом же множестве. Здесь следует отметить результаты А. В. Кузнецова, сообщенные автору без доказательства, которые состоят в том, что из всякой полной системы функций можно выделить полную систему, но состоящую из конечного числа функций, а также, что существует алгоритм, позволяющий установить, полна или не полна данная система функций.

В настоящей заметке сообщаются некоторые результаты, относящиеся к полноте k -значного исчисления, в частности дается решение этого вопроса для трехзначного исчисления.

Для формулировки результата введем ряд определений и обозначений.

Пусть P_k обозначает совокупность всех функций $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументы которых определены на множестве $E^k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ и таких, что $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E^k$, когда $\alpha_i \in E^k$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Будем считать, что вместе с функцией $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заданы все функции, которые получаются из данной путем добавления или зачеркивания любого конечного числа фиктивных переменных, т. е. переменных, от которых функция не зависит существенным образом.

Пользуясь индукцией, дадим следующее определение суперпозиции системы функций

$$\Phi_1(x_{11}, \dots, x_{1n_1}), \dots, \Phi_s(x_{s1}, \dots, x_{sn_s}). \quad (*)$$

Определение. Суперпозицией функций системы $(*)$ называется:

а) любая функция, которая получается из функций системы $(*)$ путем замены переменных;

б) если уже определено, что функции

$$\Phi^{y-1}(x_1^{y-1}, \dots, x_p^{y-1}), \Phi_1^{y-1}(x_{11}^{y-1}, \dots, x_{1m_1}^{y-1}), \dots, \Phi_l^{y-1}(x_{l1}^{y-1}, \dots, x_{lm_l}^{y-1}) \quad (l \leq p)$$

являются суперпозициями функций системы (*), то любая функция, которая получается путем замены переменных из функции

$$\Phi^{y-1}[\Psi_{i_1}^{y-1}(x_{i_1 1}^{y-1}, \dots, x_{i_1 m_{i_1}}^{y-1}), \dots, \Psi_{i_p}^{y-1}(x_{i_p 1}^{y-1}, \dots, x_{i_p m_{i_p}}^{y-1})],$$

где $\Psi_{i_\mu}^{y-1}(x_{i_\mu 1}^{y-1}, \dots, x_{i_\mu m_{i_\mu}}^{y-1})$ либо $\equiv \Phi_{i_\mu}^{y-1}(x_{i_\mu 1}^{y-1}, \dots, x_{i_\mu m_{i_\mu}}^{y-1})$ либо $\equiv x_\mu^{y-1}$.

Определение. Класс функций из P_k называется (функционально) замкнутым, если вместе со всякой системой функций $\Phi_1(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}), \dots, \Phi_s(y_{s1}, y_{s2}, \dots, y_{sn_s})$ этому классу принадлежит и любая их суперпозиция.

Определение. Система функций из P_k называется полной (в P_k), если каждая функция из P_k является суперпозицией функций этой системы.

Определение. Функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_k$ называется линейной, если имеет место представление

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \bmod k, \quad \text{где } a_i \in E^k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть L^k обозначает множество всех линейных функций из P_k .

Определение. Функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_k$ называется самодвойственной относительно $s(x)$, где $s(x)$ — подстановка k чисел множества E^k , если имеет место тождество

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = s^{-1}[\Phi(s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n))].$$

Обозначим через $S_{s(x)}^k$ множество всех самодвойственных относительно $s(x)$ функций из P_k . Пусть $<_i$ — отношение порядка во множестве E^k .

Определение. Функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_k$ называется монотонной относительно $<_i$, если $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq_i \Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, когда $\alpha_m \leq_i \beta_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$).

Обозначим через M_i^k множество всех монотонных относительно $<_i$ функций из P_k .

Пусть $E^k = E_0 + E_1$, $E_0 \cdot E_1 = N$ (пустое множество) и s — число элементов множества E_1 .

Определение. Будем говорить, что функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P_k принадлежит множеству $T_{E_0, s}^k$, если, какова бы ни была система подмножеств множества E^k $G_1, G_2, \dots, G_n$, каждое из которых состоит ровно из s элементов, найдется подмножество $G \subset E^k$, состоящее также из s элементов, так, что когда $\alpha_1 \in E_0 + G_1, \alpha_2 \in E_0 + G_2, \dots, \alpha_n \in E_0 + G_n, \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_0 + G$.

Пусть $E^k = E_1 + E_2 + \dots + E_s$ ($s \geq 2$), где множества E_i попарно не пересекаются.

Определение. Будем говорить, что функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P_k принадлежит множеству $U_{E_1, E_2, \dots, E_s}^k$, если, какова бы ни была система подмножеств множества E^k $E'_1, E'_2, \dots, E'_n$, где $E'_i = E_{i_l}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), найдется такое множество E_l , что когда $\alpha_1 \in E'_1, \alpha_2 \in E'_2, \dots, \alpha_n \in E'_n, \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_l$.

Легко видеть, что построенные классы функций — замкнутые. Введем вспомогательные обозначения: $<_1$ для соотношения порядка $0 <_1 1 <_1 2$; $<_2$ для соотношения порядка $1 <_2 2 <_2 0$ и $<_3$ для соотношения порядка $2 <_3 0 <_3 1$. Положим $\varepsilon_{ij} = \{i, j\}$, $\varepsilon_i = \{i\}$.

Теорема. Для того чтобы система функций из P_3

$\Phi_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), \Phi_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, \Phi_s(x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn}), \dots$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из следующих классов: $L^3, M_1^3, M_2^3, M_3^3, S_{x+1}^3, T_{N,2}^3, T_{\varepsilon_{01},0}^3, T_{\varepsilon_{02},0}^3, T_{\varepsilon_{12},0}^3, T_{\varepsilon_{0,0}}^3, T_{\varepsilon_{1,0}}^3, T_{\varepsilon_{2,0}}^3, T_{\varepsilon_{0,1}}^3, T_{\varepsilon_{1,1}}^3, T_{\varepsilon_{2,1}}^3, U_{\varepsilon_{01},\varepsilon_2}^3, U_{\varepsilon_{02},\varepsilon_1}^3, U_{\varepsilon_{12},\varepsilon_0}^3$. Из всякой полной системы функций (из P_3) можно выбрать конечную систему функций, состоящую не более чем из 18 функций и также полную.

Доказательство теоремы опирается на понятие гомоморфизма и изоморфизма для систем функций и основную лемму.

Будем говорить, что система $\mathfrak{P}$ функций f гомоморфно отображена на систему $\mathfrak{Q}$ функций g , когда выполнены два условия: 1) каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{P}$ соответствует одна и только одна функция $g(y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{Q}$ (зависящая от того же числа переменных); 2) если функциям $f(x_1, \dots, x_n), f_1(x_{11}, \dots, x_{1i}), \dots, f_n(x_{n1}, \dots, x_{ni_n})$ из $\mathfrak{P}$ соответствуют из системы $\mathfrak{Q}$ функции $g(y_1, \dots, y_n), g_1(y_{11}, \dots, y_{1i}), \dots, g_n(y_{n1}, \dots, y_{ni_n})$, причем $f(f_1, \dots, f_n) \in \mathfrak{P}$, то функции $f(f_1, \dots, f_n)$ соответствует принадлежащая системе $\mathfrak{Q}$ функция $g(g_1, \dots, g_n)$.

Если система $\mathfrak{P}$ отображена на систему $\mathfrak{Q}$ так, что имеет место гомоморфизм в обе стороны, то системы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ называются изоморфными.

Лемма. Пусть $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_k (k \geq 3)$ существенно зависит более чем от одного переменного и принимает $l \geq 3$ значений; тогда найдутся такие подмножества $G_i (i = 1, 2, \dots, n)$ множества E^k , состоящие каждое не более чем из двух элементов, что на наборах $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, где $\alpha_i \in G_i (i = 1, 2, \dots, n)$, $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает по крайней мере 3 значения*.

Теорема Кузнецова, о которой говорилось в начале заметки, может быть получена, опираясь на некоторые идеи Поста и сформулированные выше лемму и гомоморфизм функций. Однако, как сообщил Кузнецов, этот результат легко получается из существования функций типа Шеффера в P_k . Полная подсистема функций, получаемая при непосредственном применении теоремы Кузнецова, уже для $k = 3$ имеет мощность, вообще говоря, значительно большую, чем 18, и, тем более, чем мощность минимальной полной подсистемы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ E. L. Post, The Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic, Princeton — London, 1941. ² С. В. Яблонский, Матем. сборн., 30 (72), 2, 329 (1952).

* Эта лемма справедлива и для случая, когда E^k имеет бесконечную мощность