

А. Д. ГАЛАНИН, Б. Л. ИОФФЕ и
член-корреспондент АН СССР И. Я. ПОМЕРАНЧУК

ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ И ЗАРЯДА В КОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В работе ⁽¹⁾ была получена точная система ковариантных уравнений для задачи одного нуклона, взаимодействующего с нейтральным псевдоскалярным мезонным полем. При этом, однако, уравнения были записаны в форме, мало удобной для проведения перенормировки собственной массы и заряда. В самом деле, массовые операторы в уравнениях для G_n и D_n появлялись там только в результате выполнения итераций (см. ⁽¹⁾, 18), что делало затруднительным проведение перенормировок в общем виде. Введем поэтому с самого начала в уравнения массовый оператор $M(p, p')$. Уравнения запишем так:

$$(p - m_0) G(p, p') - \gamma_5 \int \langle \Phi(p - q) \rangle G(q, p') d^4 q - \\ - \int M(p, q) G(q, p') d^4 q = \delta(p - p'); \quad (1)$$

$$M(p, p') = \frac{g_0^2}{4\pi^2 i} \gamma_5 \int G(p + k, k') \left[\gamma_5 \delta(k' - k'' - p') + \frac{\delta M(k', p')}{\delta \langle \Phi(k'') \rangle} \right] \times \\ \times D(k'', k) d^4 k d^4 k''; \quad (2)$$

$$(k^2 - \mu_0^2) D(k, k') - \int P(k, k'') D(k'', k') d^4 k'' = \delta(k - k'); \quad (3)$$

$$P(k, k') = - \frac{g_0^2}{4\pi^2 i} \text{Sp} \gamma_5 \int \frac{\delta G(p + k, p)}{\delta \langle \Phi(k') \rangle} d^4 p \quad (4)$$

(обозначения ⁽¹⁾: $\Phi = -ig_0 \varphi$, φ — внешнее мезонное поле). Так же как и в ⁽¹⁾ представляем функции G, M, D, P в виде функциональных рядов по $\langle \Phi(k) \rangle$. После исключения δ -функций, выражающих закон сохранения импульса (см. ⁽¹⁾, 10), получим систему уравнений:

$$\{p - m_0 - M_0(p)\} G_0(p) = 1; \quad (5)$$

$$G_n(p, s_1, \dots, s_n) = G_0(p) [\gamma_5 + M_1(p, s_n)] G_{n-1}(p - s_n, s_1, \dots, s_{n-1}) + \\ + G_0(p) \sum_{m=0}^{n-2} M_{n-m}(p, s_{m+1}, \dots, s_n) G_m\left(p - \sum_{i=m+1}^n s_i, s_1, \dots, s_m\right) (n \neq 0); \quad (6)$$

$$\{k^2 - \mu^2 - P_0(k)\} D_0(k) = 1; \quad (7)$$

$$D_n(k, s_1, \dots, s_n) = D_0(k) \sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m}(k, s_{m+1}, \dots, s_n) \times \\ \times D_m\left(k - \sum_{i=m+1}^n s_i, s_1, \dots, s_m\right) \quad (n \neq 0); \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
M_n(\mathbf{p}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) = & \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \gamma_5 \int d^4 k \sum_{m=0}^n \left\{ G_{n-m}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_n) \times \right. \\
& \times \left[\gamma_5 + M_1 \left(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \sum_{i=m+1}^n \mathbf{s}_i, \mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{s}_i \right) \right] + \\
& + \sum_{l=m+1}^n \sum_{j=m+1}^{+1} G_{n-l}(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{s}_{l+1}, \dots, \mathbf{s}_n) \times \\
& \times M_{-m+1} \left(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \sum_{i=l+1}^n \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_{j-1}, \mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j, \dots, \mathbf{s}_l \right) \Big\} \times \\
& \times D_m \left(\mathbf{k} + \sum_{i=1}^m \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m \right); \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n(\mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) = \\
= -\frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \text{Sp} \gamma_5 \sum_{j=1}^{n+1} \int d^4 p G_{n+1} \left(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{j-1}, \mathbf{k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j, \dots, \mathbf{s}_n \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Произведем теперь в системе уравнений (5)–(10) перенормировку массы и заряда, т. е. вместо фиктивных массы нуклона m_0 , массы мезона μ_0 и заряда g_0 введем экспериментальные значения m , μ и g .

Заметим, что фиктивная масса нуклона m_0 входит только в уравнение (5) для G_0 , так что перенормировку массы нуклона достаточно произвести лишь в этом уравнении. Если экспериментальная масса нуклона равна m , то функция Грина нуклона $G_0(\mathbf{p})$ должна иметь полюс при $\mathbf{p} = m$, т. е. должно выполняться равенство $m - m_0 - M_0(m) = 0$. Исключая отсюда m_0 , приводим (5) к виду:

$$\{\mathbf{p} - m - [M_0(\mathbf{p}) - M_0(m)]\} G_0(\mathbf{p}) = 1. \quad (11)$$

Тогда при $\mathbf{p} \rightarrow m$ $G_0(\mathbf{p})$ будет равно $G_0(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - m)^{-1} [1 - M'_0(m)]$ вместо правильного выражения $G_0(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - m)^{-1}$. Поступим поэтому следующим образом: член в лагранжиане, соответствующий свободному движению нуклона, запишем так:

$$L_0 = Z_2^{-1} \bar{\psi}(\mathbf{p} - m) \psi$$

и произведем перенормировку нуклонных волновых функций: $\psi = Z_2^{1/2} \psi^*$, $\bar{\psi} = Z_2^{1/2} \bar{\psi}^*$. При этом функция Грина нуклона $G_0(\mathbf{p})$ перенормируется как $G_0 = Z_2 G_0^*$. Запишем (11) в виде

$$\{\mathbf{p} - m - (\mathbf{p} - m) M'_0(m) - [M_0(\mathbf{p}) - M_0(m) - (\mathbf{p} - m) M'_0(m)]\} G_0(\mathbf{p}) = 1. \quad (12)$$

Тогда ясно, что при $Z_2^{-1} = 1 - M'_0(m)$ уравнение для $G_0^*(\mathbf{p})$ будет

$$\{\mathbf{p} - m - \tilde{M}_0(\mathbf{p})\} G_0^*(\mathbf{p}) = 1, \quad (13)$$

где

$$\tilde{M}_0(\mathbf{p}) = M_0^*(\mathbf{p}) - M_0^*(m) - (\mathbf{p} - m) M_0'^*(m), \quad M_0^* = Z_2 M_0 \quad (14)$$

и, следовательно, $G_0^*(\mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{p} - m)^{-1}$ при $\mathbf{p} \rightarrow m$. Тем самым перенормировка массы нуклона закончена. Совершенно аналогично производится перенормировка массы мезона. Связь экспериментальной массы

мезона μ с фиктивной μ_0 будет даваться уравнением $\mu^2 = \mu_0^2 + P_0(\mu^2)$ и, если мезонные волновые функции и функцию Грина $D_0(\mathbf{k}^2)$ перенормировать как $\varphi = Z_3^{1/2} \varphi^*$, $D_0 = Z_3 D_0^*$, $Z_3^{-1} = 1 - P_0'(\mu^2)$, то уравнение для перенормированной функции $D_0^*(\mathbf{k}^2)$ будет иметь вид

$$\{\mathbf{k}^2 - \mu^2 - \tilde{P}_0(\mathbf{k}^2)\} D_0^*(\mathbf{k}^2) = 1, \quad (15)$$

где

$$\tilde{P}_0(\mathbf{k}^2) = P_0^*(\mathbf{k}^2) - P_0^*(\mu^2) - (\mathbf{k}^2 - \mu^2) P_0'^*(\mu^2), \quad P_0^* = Z_3 P_0. \quad (16)$$

Необходимо еще произвести перенормировку заряда g_0 . Для того чтобы определить связь между экспериментальным зарядом g и фиктивным зарядом g_0 , рассмотрим задачу о взаимодействии нуклона с внешним мезонным полем $\langle \varphi(\mathbf{k}^2) \rangle$. Если при этом нуклон можно считать свободным ($\mathbf{p} = m$), а внешнее поле слабым и удовлетворяющим уравнению $(\mathbf{k}^2 - \mu^2) \varphi(\mathbf{k}^2) = 0$ (т. е. $\mathbf{k}^2 = \mu^2$), то энергия взаимодействия должна выражаться через экспериментальный заряд g и перенормированные функции нуклона $\bar{\psi}^*$, ψ^* и внешнее мезонное поле так*:

$$g \bar{\psi}^*(\mathbf{p}) \gamma_5 \psi^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle^*. \quad (17)$$

С другой стороны, в этом случае энергия взаимодействия должна быть равна

$$g_0 \bar{\psi}(m) [\gamma_5 + M_1(m, \mu)] \psi(m) \langle \varphi(\mu) \rangle, \quad (18)$$

так как взаимодействие с внешним полем описывается функцией $G_1(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle = G_0(\mathbf{p}) [\gamma_5 + M_1(\mathbf{p}, \mathbf{k})] G_0(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle$, в которой вместо функций Грина $G_0(\mathbf{p})$ и $G_0(\mathbf{p} - \mathbf{k})$, соответствующих внешним линиям, нужно подставить волновые функции нуклонов.

Приравнявая (17) и (18) и используя связь между перенормированными и неперенормированными волновыми функциями, находим соотношение между g и g_0 :

$$g_0^2 = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1} g^2, \quad (19)$$

где $Z_1^{-1} = 1 + \gamma_5 M_1(m, \mu) = 1 + L$, поскольку $M_1(m, \mu)$ должно иметь вид $\gamma_5 L$, где L не содержит матриц γ . Общее выражение для взаимодействия нуклона с внешним мезонным полем, когда $\mathbf{p} \neq m$ и $\mathbf{k}^2 \neq \mu^2$, должно, согласно (19), перенормироваться следующим образом:

$$\begin{aligned} & g_0 \bar{\psi}(\mathbf{p}) [\gamma_5 + M_1(\mathbf{p}, \mathbf{k})] \psi(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle = \\ & = g \bar{\psi}^*(\mathbf{p}) \{\gamma_5 + \tilde{M}_1(\mathbf{p}, \mathbf{k})\} \psi^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \langle \varphi^*(\mathbf{k}) \rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\tilde{M}_1(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = M_1^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - M_1^*(m, \mu), \quad M_1^* = Z_1 M_1. \quad (21)$$

Величины G_n , D_n , M_n , P_n , которые являются коэффициентами разложения функций G , D , M , P по $g_0 \langle \varphi \rangle$, должны перенормироваться таким образом, чтобы при всех членах разложения данной функции в функциональный ряд возникал один и тот же множитель. Так как

* При выполнении двух равенств $\mathbf{p} = m$ и $\mathbf{k}^2 = \mu^2$ не будет сказываться внутренняя структура нуклона, что необходимо для определения экспериментального заряда g и силы внешнего поля φ^* . В электродинамике ($\mu = 0$) это соответствовало бы взаимодействию с полем с большими длинами волн. В мезодинамике $\varphi(\mathbf{k}^2)$ в общем случае подчиняется уравнению $(\mathbf{k}^2 - \mu^2) \varphi = I$, где I — нуклонный ток. Условие $\mathbf{k}^2 = \mu^2$ означает, что φ не зависит от нуклонных токов (2). Члены, пропорциональные $(\mathbf{k}^2 - \mu^2)^n \varphi(\mathbf{k}^2) \sim I^{(n)}(\mathbf{k}^2)$, вносят в (20) выражения, зависящие от нуклонного тока и его производных, которые не могут входить в перенормировку.

$$g_0 \langle \varphi \rangle = Z_1 Z_2^{-1} g \langle \varphi \rangle^*, \text{ то для } G_n, D_n, M_n, P_n \text{ получается}$$

$$G_n = Z_1^{-n} Z_2^{n+1} G_n^*, \quad D_n = Z_1^{-n} Z_2^n Z_3 D_n^*, \quad M_n = Z_1^{-n} Z_2^{n-1} M_n^*,$$

$$P_n = Z_1^{-n} Z_2^n Z_3^{-1} P_n^*. \quad (22)$$

Подставляя (19) и (22) в уравнения (5)–(10) и учитывая (13), (14), (15), (16), (20), (21), получим следующую систему уравнений для перенормированных функций $G_n^*, D_n^*, M_n^*, P_n^*$ (в сокращенной записи):

$$\{ \mathbf{p} - m - [M_0^*(\mathbf{p}) - M_0^*(m) - (\mathbf{p} - m) M_0^*(m)] \} G_0^*(\mathbf{p}) = 1,$$

$$G_n^* = G_0^* [\gamma_5 + M_1^*(\mathbf{p}, s_n) - M_1^*(m, \mu)] G_{n-1}^* + G_0^* \sum_{m=0}^{n-2} M_{n-m}^* G_m^*,$$

$$M_n^* = \frac{g^2}{4\pi^3 i} Z_1 \gamma_5 \int d^4 k \sum_{m=0}^n \left\{ G_{n-m}^* [\gamma_5 + M_1^*(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{k}) - M_1^*(m, \mu)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=m+1}^n G_{n-l}^* M_{l-m+1}^* \right\} D_m^*,$$

$$\{ \mathbf{k}^2 - \mu^2 - [P_0^*(\mathbf{k}^2) - P_0^*(\mu^2) - (\mathbf{k}^2 - \mu^2) P_0^*(\mu^2)] \} D_0^*(\mathbf{k}^2) = 1,$$

$$D_n^* = D_0^* \sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m}^* D_m^*, \quad P_n^* = - (g^2 / 4\pi^3 i) Z_1 \text{Sp} \gamma_5 \int d^4 p G_{n+1}^*. \quad (23)$$

Все множители Z_1, Z_2, Z_3 выпали из (23) за исключением Z_1 в уравнениях для M_n^* и P_n^* . Наличие этого множителя обусловлено следующим обстоятельством. Вставка вершинных частей во все вершины диаграмм для M_n и P_n , кроме самых левых, возникает за счет членов с M_1 , стоящих в правых частях уравнений для G_n и M_n . Перенормировка их осуществляется путем замены $M_1(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ на $M_1(\mathbf{p}, \mathbf{k}) - M_1(m, \mu)$. Вставка же вершинной части в самую левую вершину диаграммы для M_n происходит от членов $\sim M_{n+1}$. Поэтому перенормировка таких вершинных частей должна производиться путем вычитания выражений типа $M_1(m, \mu) M_n$. Можно проверить, что, решая уравнения (23) методом итераций, мы получим результаты теории возмущений с учетом перенормировок, причем метод перенормировки совпадает с развитым в работах (^{3,4}). Все бесконечности при этом сократятся.

Однако попытка обрыва системы (23) на m -м члене с последующим точным решением конечного числа уравнений наталкивается на некоторые трудности, если $M_1^*(m, \mu)$ является бесконечным. Действительно, тогда бесконечные интегралы, возникающие из множителя Z_1 (в уравнениях для $M_n, n < m$), не будут совпадать с интегралами от M_{n+1} и имевшее место сокращение бесконечностей нарушится. Поэтому при решении каждой конкретной оборванной системы необходимо будет определять Z_1 таким образом, чтобы ликвидировать все бесконечности, возникающие от левых углов диаграмм. Отметим, что при проведении перенормировки мы использовали только чисто физические аргументы о необходимости замены фиктивных масс и заряда на экспериментальные. Такая замена должна быть выполнена независимо от того, конечны или бесконечны массовый и поляризационный операторы. Вопрос о том, исключены ли этим из теории все бесконечности или нет (например, рассеяние мезона на мезоне), должен быть решен путем исследования полученной системы уравнений.

Поступило
22 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Иоффе, ДАН, 95, 761 (1954). ² J. Ashkin, A. Simon, R. Marshak, Progr. Theor. Phys., 5, 634 (1950). ³ F. J. Dyson, Phys. Rev., 75, 1736 (1949). ⁴ A. Salam, Phys. Rev., 82, 217 (1951).