

А. И. ФЕТ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЮСТЕРНИКА — ШНИРЕЛЬМАНА О ПОКРЫТИЯХ СФЕР И НЕКОТОРЫХ СВЯЗАННЫХ С НЕЙ ТЕОРЕМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 II 1954)

Недавно И. И. Гордон ⁽¹⁾ поставил вопрос, остается ли справедливой известная теорема Люстерника — Шнирельмана о покрытиях сфер ⁽²⁾, если в ней заменить отражение относительно центра сферы произвольным инволюционным отображением сферы в себя. Положительный ответ на этот вопрос дается следующей теоремой, представляющей, как нам кажется, интерес еще и в том отношении, что ее формулировка — чисто топологическая (в то время как центральная симметрия — не топологическая операция).

Теорема 1. Пусть S^n есть n -мерная сфера; ϑ — непрерывное отображение S^n в себя, квадрат которого есть тождественное отображение S^n ; $\Sigma = \{F_1, F_2, \dots, F_{n+1}\}$ — покрытие S^n , состоящее из $n+1$ замкнутых множеств. Тогда по крайней мере одно из множеств F_i покрытия Σ пересекается со своим образом при отображении ϑ .

Поскольку теорема 1 очевидна в случае, когда ϑ имеет неподвижную точку, можно считать, что ϑ — гомеоморфизм без неподвижных точек. Отождествление ψ точек $a, \vartheta(a)$ ($a \in S^n$) превращает S^n в топологическое многообразие Π^n , а шар T^{n+1} , имеющий S^n своей границей, — в топологическое многообразие Π^{n+1} . Неизвестно, триангулируемы ли Π^n и Π^{n+1} ; вследствие этого приходится пользоваться в доказательстве теорией гомологий в компактах, построенной П. С. Александровым.

Для краткости мы рассмотрим здесь только случай непрерывно дифференцируемого гомеоморфизма ϑ , когда Π^n, Π^{n+1} могут быть триангулированы.

Определим следующую деформацию D_t ($0 \leq t \leq 1$) сферы S^n на себе.

Пусть $a \in S^n$, O — центр S^n , $\overrightarrow{a_t b_t}$ — вектор, параллельный и одинаково направленный с $\overrightarrow{a \vartheta(a)}$, лежащий в плоскости $Oa \vartheta(a)$ по ту же сторону от O , что и $\overrightarrow{a \vartheta(a)}$, и отстоящий от O на расстояние, относящееся к расстоянию от O до $\overrightarrow{a \vartheta(a)}$ как $1-t$ к 1 (если $\overrightarrow{a \vartheta(a)}$ — диаметр S^n , то при всех $t, 0 \leq t \leq 1$, полагаем $a_t = a, b_t = \vartheta(a)$).

Определим D_t формулами $D_t(a) = a_t, D_t(\vartheta(a)) = b_t$. Легко видеть, что D_t — непрерывная деформация S^n на себе; степень D_t равна 1 и $D_1(S^n) = S^n$. Отображение D_1 переводит точки $a, \vartheta(a)$ в диаметрально

но противоположные точки $a', \tau(a')$ сферы S^n , где τ — отображение относительно центра O . Отображение D_1 порождает, следовательно, непрерывное отображение Π^n в проективное пространство P^n . Отобразив радиусы Oa линейно на $OD_1(a)$ ($a \in S^n$), получает отображение D_1 шара T^{n+1} на себя, порождающее отображение f топологического многообразия $\hat{\Pi}^{n+1}$ в проективное пространство P^{n+1} . На Π^n отображение f совпадает с ранее определенным отображением. Из того, что степень D_1 на S^n равна 1, легко следует, что индуцируемый f гомоморфизм η групп Бетти $\Delta^r(\hat{\Pi}^{n+1})$ в $\Delta^r(P^{n+1})$ переводит базисный Δ -класс $z^{n+1} \in \Delta^{n+1}(\hat{\Pi}^{n+1})$ в базисный Δ -класс $v^{n+1} \in \Delta^{n+1}(P^{n+1})$:

$$\eta(z^{n+1}) = v^{n+1}. \quad (1)$$

Обозначим через V^1 базисный одномерный ∇ -цикл P^{n+1} через η^* — сопряженный η гомоморфизм ∇ -кольца P^{n+1} в ∇ -кольцо $\hat{\Pi}^{n+1}$.

Положим

$$V^{n+1} = (V^1)^{n+1}, \quad Z^1 = \eta^*(V^1), \quad Z^{n+1} = (Z^1)^{n+1}.$$

Тогда будет

$$Z^{n+1} = \eta^*(V^{n+1}),$$

и, согласно (1),

$$Z^{n+1} \cdot z^{n+1} = \eta^*(V^{n+1}) \cdot z^{n+1} = V^{n+1} \cdot \eta(z^{n+1}) = V^{n+1} \cdot v^{n+1} = 1.$$

Итак, $Z^{n+1} \propto 0$ на $\hat{\Pi}^{n+1}$; значит, длина $\hat{\Pi}^{n+1}$ не меньше $n+1$, откуда вытекает:

Теорема 2. Категория $\hat{\Pi}^{n+1}$ равна $n+2$.

Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема 3. Категория Π^n равна $n+1$.

Теоремы 2 и 3 являются обобщениями известной теоремы Люстерника — Шнирельмана о категории проективного пространства.

Пусть теперь, вопреки утверждению теоремы 1, имеется такое покрытие $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, что ни одно F_i не содержит пары точек $a, \vartheta(a)$. Тогда на F_i отображение ψ гомеоморфно, и существует отображение ψ_i^{-1} множества $\tilde{F}_i = \psi(F_i)$ на F_i , обратное ψ ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Так как на S^n F_i гомотопны нулю, то $\tilde{F}_i$ гомотопны нулю на Π^n . Присоединяя к $\tilde{F}_i$ все радиусы Oa , для которых $a \in \tilde{F}_i$, получаем замкнутое множество Φ_i ; ясно, что $\bigcup_{i=1}^{n+1} \Phi_i = \hat{\Pi}^{n+1}$ и что каждое Φ_i гомотопно нулю на $\hat{\Pi}^{n+1}$. Но это несовместимо с теоремой 2, чем теорема 1 доказана.

Следующая теорема обобщает известную теорему Борсука (3).

Теорема 4. Пусть на $(n+1)$ -мерном шаре T^{n+1} с границей S^n задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов на S^n , удовлетворяющее условию: в точках $a, \vartheta(a)$ ($a \in S^n$) векторы поля Φ направлены неодинаково. Тогда в шаре T^{n+1} поле Φ имеет нулевые векторы.

Если допустить, что теорема неверна, то можно (ср. (4), стр. 162) построить на T^{n+1} непрерывные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ без общего нуля и такие, что

$$\varphi_j(\vartheta(a)) = -\varphi_j(a) \quad (j = 1, \dots, n+1, a \in S^n). \quad (2)$$

Пусть T_1^{n+1} — $(n+1)$ -мерный шар; отождествив поверхности T^{n+1} и T_1^{n+1} , получим $(n+1)$ -мерную сферу S^{n+1} . Пусть χ — гомеоморфизм S^{n+1} , оставляющий на месте точки S^n , переводящий $T^{n+1} \setminus S^n$ в $T_1^{n+1} \setminus S^n$ и $T_1^{n+1} \setminus S^n$ в $T^{n+1} \setminus S^n$.

Введем на T^{n+1} «полярные координаты» $p(\rho, a)$, где a есть точка пересечения радиуса Op с S^n , а $\rho = \frac{|Op|}{|Oa|}$ ($\rho \neq a$).

Определим на T^{n+1} отображение $\tilde{\vartheta}$, полагая $\tilde{\vartheta}(\rho, a) = (\rho, \vartheta(a))$, $\tilde{\vartheta}(0) = 0$.

Распространим ϑ на всю S^{n+1} , полагая

$$\vartheta(p) = \chi \tilde{\vartheta}(p), \text{ если } p \in T^{n+1};$$

$$\vartheta(p) = \tilde{\vartheta}\chi(p), \text{ если } p \in T_1^{n+1}.$$

ϑ есть инволюционный гомеоморфизм S^{n+1} без неподвижных точек.

Полагая для $a \in T_1^{n+1}$ $\varphi_j(a) = -\varphi_j(\vartheta(a))$, мы распространяем φ_j ($j = 1, \dots, n+1$) на S^{n+1} с сохранением свойства (2).

Пусть теперь Φ_i ($i = 1, \dots, n+1$) — множество тех $p \in S^{n+1}$, для которых некоторая $\varphi_j(p) \geq \alpha$ ($\alpha > 0$); Φ_{n+2} — множество тех $p \in S^{n+1}$, для которых все $\varphi_j(p) \leq \alpha$ ($j = 1, \dots, n+1$). Так как φ_j удовлетворяют (2) и не имеют общих нулей, при достаточно малых $\alpha > 0$ покрытие $\Phi_1, \dots, \Phi_{n+2}$ таково, что ни одно Φ_j не содержит пары точек $p, \vartheta(p)$. Но это противоречит теореме 1 (где надо взять $n+1$ вместо n).

Из теоремы 4 следует, что «задача А» М. А. Красносельского ((⁴), стр. 163) имеет положительное решение в случае, когда оператор L инволюционный.

Наконец, мы обобщим еще другую теорему Борсука:

Теорема 5. Пусть f — непрерывное отображение сферы S^n в евклидово пространство E^n . Существует по крайней мере одна точка $a \in S^n$ такая, что $f(a) = f(\vartheta(a))$.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Введем в E^n декартовы координаты $x^1, \dots, x^n$; задание отображения f равносильно заданию n функций $x_j = \varphi_j(a)$ на S^n таких, что ни для какой точки $a \in S^n$ не выполнены все равенства $\varphi_j(a) = \varphi_j(\vartheta(a))$. Продолжим функции φ_j на весь шар $T^{n+1} \subset E^{n+1}$, имеющий S^n своей границей, и определим на T^{n+1} непрерывное векторное поле, сопоставляя каждой точке $a \in T^{n+1}$ вектор с проекциями $\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)$, 1. Полученное векторное поле удовлетворяет условиям теоремы 4, но не имеет нулей в T^{n+1} , что невозможно.

Могут быть обобщены и некоторые другие теоремы из круга вопросов, связанных с теоремой 1.

Поступило
21 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Гордон, Усп. матем. наук, 8, в. 5, 151 (1953). ² Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930. ³ K. Borsuk, Fund. Math., 20 (1953). ⁴ М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, 6, в. 5, 162 (1951).