

Б. М. УРАЗБАЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РОСТА ЧИСЛА АБЕЛЕВЫХ ПОЛЕЙ СТЕПЕНИ l^2

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 II 1954)

1. В настоящей заметке рассматриваются абелевы поля типа (l, l) , т. е. поля степени l^2 относительно поля рациональных чисел, являющиеся прямым произведением двух циклических полей простой степени l . Относительно таких полей доказывается следующее:

1°. Дискриминант поля равен *

$$D = (p_1 p_2 \dots p_k)^{l(l-1)},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — простые числа вида $p \equiv 1 \pmod{l}$.

2°. Число полей с одним и тем же дискриминантом D равно

$$\frac{(l+1)^{k-1} - 1}{l} (l-1)^{k-2}.$$

3°. Закон роста числа полей, дискриминанты которых не превосходят $x^{l(l-1)}$, выражается асимптотической формулой

$$xf(\lg x) + O\left(x^{1 - \frac{1}{l^2-1} + \varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

где $f(y)$ — многочлен l -й степени с постоянными коэффициентами (зависящими от l).

При доказательстве утверждений 1° и 2° используется теорема Кронекера — Вебера: всякое абелево поле относительно поля рациональных чисел может быть вложено в поле деления круга. Опуская доказательство, можно отметить следующее. Строится наименьшее поле деления круга, где содержатся все абелевы поля типа (l, l) с дискриминантом D . Используя аппарат теории Галуа, дается, далее, метод построения групп, гомоморфных группам, к которым принадлежат абелевы поля типа (l, l) в наименьшем поле деления круга. Построение гомоморфных групп осуществляется путем специального выбора базиса абелевых групп. Таким образом, определение числа абелевых полей типа (l, l) с дискриминантом D сопровождается фактическим построением групп, однозначно определяющих сами эти поля.

2. Перейдем к доказательству утверждения 3°. Оно построено на идеях доказательства асимптотического закона распределения простых чисел $(1, 2)$.

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{l}} \left(1 + \frac{l^2 - 1}{p^s}\right), \quad s = \sigma + it.$$

* Будет предполагаться, что простое число l не критическое.

Из соотношения (см. (5))

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-\varepsilon}, \quad fg = l - 1,$$

справедливого для L -функции Дирихле (2) (χ — характеры (mod l)), вытекает

$$f(s) = \left(\prod_{\chi} L(s, \chi)\right)^{l+1} \prod_{p \equiv 1 \pmod{l}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{l-1} \left(1 + \frac{l^2-1}{p^s}\right) \cdot \left(\prod_{p \not\equiv 1 \pmod{l}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{\varepsilon}\right)^{l+1}. \quad (1)$$

Отсюда по принципу аналитического продолжения следует, что функция $f(s)$ регулярна во всей плоскости, кроме точки $s = 1$, которая есть полюс порядка $l + 1$.

3. В полосе $1/2 \leq \sigma_0 < \sigma < 1$ справедлива оценка

$$|f(s)| = O\left(t^{\left(\frac{1-\sigma}{2} + \varepsilon\right)(l-1)}\right). \quad (2)$$

Доказательство вытекает из (1), если только воспользоваться оценкой $L(s, \chi)$ в книге Титчмарша (3) (теорема 11, стр. 29). Из (2) следует, что интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds$ сходится при $a = 1 - \frac{2}{l^2-1} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

4. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds, \quad (3)$$

где Γ — четырехугольник $(a-iT, 2-iT, 2+iT, a+iT)$, $a = 1 - \frac{1}{l^2-1} + \varepsilon$. На контуре Γ подинтегральная функция не имеет особенностей, кроме внутренней точки $s = 1$ — полюса порядка $l + 1$. Нетрудно вычислить вычет этой функции в точке $s = 1$. Составим разложения

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{c_{-l-1}}{(s-1)^{l+1}} + \frac{c_{-l}}{(s-1)^l} + \dots + \frac{c_{-1}}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \dots (c_{-l-1} \neq 0), \\ \frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(s-1) + \frac{7}{8}(s-1)^2 + \dots, \\ x^{s-1} &= e^{(s-1) \lg x} = 1 + (s-1) \lg x + \frac{1}{2!} (s-1)^2 \lg^2 x + \dots \\ &\dots + \frac{1}{l!} (s-1)^l \lg^l x + \dots *. \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что вычет $\frac{f(s)}{s(s+1)} x^{s-1}$ есть многочлен $f_1(y)$ степени l относительно $y = \lg x$:

$$\operatorname{Res}_{s=1} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^{s-1} = f_1(\lg x).$$

При $T \rightarrow \infty$ интегралы на отрезках $(a-iT, 2-iT)$, $(2+iT, a+iT)$ стремятся к 0. Следовательно, по теореме Коши находим из (3) при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds &= x f_1(\lg x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds, \\ a &= 1 - \frac{2}{l^2-1} + \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

* Здесь предполагается главное значение $\lg x$.

5. Функция $f(s)$ может быть представлена в форме

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s},$$

$$I(n) = \begin{cases} (l^2 - 1)^k, & \text{если } n = p_1 p_2 \dots p_k, \quad p_i \equiv 1 (l), \\ 0 & \text{если } n \neq p_1 p_2 \dots p_k. \end{cases} \quad (5)$$

Введем функции

$$\varphi(x) = \sum_{n \leq x} I(n), \quad \varphi_1(x) = \int_1^x \varphi(u) du.$$

Очевидно,

$$\frac{\varphi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) I(n). \quad (6)$$

Интеграл слева в (4) абсолютно сходится и, кроме того, при $\sigma = 2$ равномерно сходится ряд (5); поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds = \sum_{n=1}^{\infty} I(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds$$

или (см. (1), теорема В, стр. 43)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) I(n). \quad (7)$$

Интеграл справа (4) есть величина порядка $O(x^{1+a})$, поэтому из (4), (6), (7) следует

$$\varphi_1(x) = x^2 f_1(\lg x) + O\left(x^{2 - \frac{2}{l^2-1} + \varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Производя обычный переход (см. (1), стр. 83) от оценки (8) для $\varphi_1(x)$ к оценке ее производной $\varphi(x)$, находим

$$\varphi(x) = x f_2(\lg x) + O\left(x^{1 - \frac{1}{l^2-1} + \varepsilon}\right), \quad (9)$$

где $f_2(y)$ — также многочлен степени l .

Присоединяя к асимптотической оценке (9) асимптотическую формулу (4)

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} (l-1)^k = \lambda x + O\left(x^{1 - \frac{1}{l^2-1} + \varepsilon}\right),$$

приходим к утверждению 3°.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Ингам, Распределение простых чисел, 1936. ² Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L -функций Дирихле, 1947. ³ Е. К. Титчмарш, Дзета-функция Римана, 1947. ⁴ Б. Уразбаев, Изв. АН Казахск.ССР, сер. матем. мех., в. 5 (1951). ⁵ Г. Хассе, Лекции по теории чисел, 1953, стр. 260.