

Б. И. ПЛОТКИН

СТРУКТУРНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ РАЗРЕШИМЫХ R -ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 II 1954)

§ 1. Один из основных результатов этой заметки состоит в доказательстве того факта, что в случае R^* -групп разрешимость есть структурное свойство. Через φ будем всегда обозначать структурный изоморфизм двух групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^\varphi$. Если H — подгруппа из $\mathfrak{G}$, то H^φ означает ее образ в $\mathfrak{G}^\varphi$ при структурном изоморфизме φ . В работе используются понятия R -группы, R^* -группы, изолированной и плотной подгрупп. (Определение этих понятий, так же как ряд основных фактов о структурных изоморфизмах групп, см. (1-4).)

Из этих определений и из гл. II книги (1), в частности, следует:

- а) Если $\mathfrak{G}$ — группа без кручения, то и $\mathfrak{G}^\varphi$ — группа без кручения.
- б) Если $\mathfrak{G}$ — коммутативная группа без кручения, то и $\mathfrak{G}^\varphi$ — коммутативная группа без кручения.
- в) Если $\mathfrak{G}$ — R -группа, то и $\mathfrak{G}^\varphi$ — R -группа.
- г) Если H — изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}$, то и H^φ — изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}^\varphi$.
- д) Если H — циклическая или локально циклическая подгруппа в $\mathfrak{G}$, то H^φ — циклическая (соответственно, локально циклическая) подгруппа в $\mathfrak{G}^\varphi$.

§ 2. Лемма 1. Если $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^\varphi$ — две структурно-изоморфные группы без кручения и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ — центр группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^\varphi$ — центр группы $\mathfrak{G}^\varphi$, т. е. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^\varphi = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^\varphi)$.

Доказательство. Пусть циклическая подгруппа $\{g\}$ содержится в $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^\varphi$ и $\{x\}$ — любая другая циклическая подгруппа из $\mathfrak{G}^\varphi$.

Пусть, далее, A и B такие (циклические) подгруппы в $\mathfrak{G}$, что $A^\varphi = \{g\}$ и $B^\varphi = \{x\}$. Так как $A \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, то $\{AB\}$ — коммутативная группа. Значит (свойство б), $\{g, x\}$ — коммутативная группа, т. е. $g \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^\varphi)$, или $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^\varphi \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^\varphi)$. Используя обратный изоморфизм, получаем $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^\varphi)^{\varphi^{-1}} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Отсюда $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}^\varphi) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})^\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^\varphi$ — две структурно-изоморфные группы без кручения, причем группа $\mathfrak{G}$ обладает рациональным рядом:

$$E \subset H \subset \mathfrak{G},$$

где H — не циклический рациональный нормальный делитель в $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{G}/H$ — бесконечная циклическая группа. Тогда H^φ — нормальный делитель в $\mathfrak{G}^\varphi$.

Доказательство. Вначале покажем, что если H' — некоторая плотная изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}$, отличная от H , то H' — беско-

нечная циклическая группа. Так как H' плотная и изолированная, то $H' \cap H = E$. Отсюда:

$$H'H/H \approx H'/H' \cap H \approx H'.$$

Но $H'H/H$ как подгруппа $\mathbb{G}/H$ есть бесконечная циклическая группа. Значит, и H' — бесконечная циклическая группа. Допустим теперь, что H° не является нормальным делителем в $\mathbb{G}^\circ$, и H'° — некоторая сопряженная с H° подгруппа в $\mathbb{G}^\circ$. H° является изолированной, плотной и не циклической подгруппой в $\mathbb{G}^\circ$. Этими же свойствами обладает и H'° . Если H' — прообраз H'° в $\mathbb{G}$, то и H' — плотная изолированная и не циклическая подгруппа в $\mathbb{G}$, отличная от H .

Из предыдущего следует, что таких подгрупп в $\mathbb{G}$ нет. Полученное противоречие показывает, что $H^\circ = H'^\circ$, т. е. H° инвариантна в $\mathbb{G}^\circ$.

Лемма 3. Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}^\circ$ — две структурно-изоморфные R -группы, причем группа $\mathbb{G}$ обладает рациональным рядом длины 2 (группа рационального ранга 2):

$$E \subset H \subset \mathbb{G}.$$

Тогда H° — нормальный делитель в $\mathbb{G}^\circ$.

Доказательство. В работе (4) нами показано, что при условиях леммы, если $\mathbb{G}$ — некоммутативная группа, то H — не циклическая группа, а $\mathbb{G}/H$ — бесконечная циклическая группа. Значит, если $\mathbb{G}$ некоммутативна, то мы можем сослаться на предыдущую лемму. Если же $\mathbb{G}$ коммутативна, то и $\mathbb{G}^\circ$ коммутативна, и инвариантность H° очевидна.

Лемма 4. Пусть $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}^\circ$ — две структурно-изоморфные R -группы. Пусть, далее, A — инвариантная, коммутативная и изолированная подгруппа в $\mathbb{G}$. Тогда A° будет также инвариантной, коммутативной и изолированной подгруппой в $\mathbb{G}^\circ$.

Доказательство. Коммутативность и изолированность A° очевидны. Нужно доказать инвариантность. Покажем, что мы можем ограничиться случаем, когда $\mathbb{G}/A$ — бесконечная циклическая группа. Действительно, чтобы доказать инвариантность A° в $\mathbb{G}^\circ$, достаточно показать, что A° инвариантна в $\{A^\circ, g\}$, где g — произвольный элемент в $\mathbb{G}^\circ$. Пусть B — такая циклическая подгруппа в $\mathbb{G}$, что $B^\circ = \{g\}$. Тогда $\{AB\}^\circ = \{A^\circ, g\}$ и обе эти группы, очевидно, R -группы. Так как $\{AB\}/A$ — бесконечная циклическая группа, то дальше мы можем считать, что уже $\mathbb{G}/A$ — бесконечная циклическая группа. Допустим, что A° не инвариантна в $\mathbb{G}^\circ$. Тогда в $\mathbb{G}^\circ$ найдется такой элемент g , что $g^{-1}A^\circ g \neq A^\circ$. Подгруппы $g^{-1}A^\circ g$ и A° не инцидентны, так как обе они — максимальные изолированные подгруппы в $\mathbb{G}^\circ$. Последнее следует из того, что A — максимальная изолированная подгруппа в $\mathbb{G}$. Пусть A' — такая подгруппа в $\mathbb{G}$, что $A'^\circ = g^{-1}A^\circ g$. A и A' не инцидентны, и поэтому $I(AA') = \mathbb{G}$. Так как A и A' обе коммутативны, то их пересечение $D = A \cap A'$ находится в центре AA' . Из того, что $\mathbb{G}$ — R -группа, следует, что D — изолированная подгруппа центра $\mathbb{G}$. Из леммы 1 следует, что $D^\circ = A^\circ \cap g^{-1}A^\circ g$ является изолированной подгруппой центра $\mathbb{G}^\circ$. Покажем, что $\mathbb{G}/D$ — R -группа рационального ранга 2. Так как $A'/D = A'/A' \cap A \approx AA'/A$, то D — максимальная изолированная подгруппа в A' . Отсюда D° — максимальная изолированная подгруппа в $g^{-1}A^\circ g$, а $gD^\circ g^{-1}$ будет максимальной изоли-

рованной подгруппой в A^φ . Но D^φ в центре $\mathfrak{G}^\varphi$, и поэтому $D^\varphi g^{-1} = D^\varphi$, и D^φ будет максимальной изолированной подгруппой в A^φ . Но тогда D обладает этим свойством в A . Значит, A/D и $\mathfrak{G}/A$ — рациональные группы. Известно (3), что фактор-группа R -группы по изолированной подгруппе центра снова R -группа. Значит, $\mathfrak{G}/D$ и $\mathfrak{G}^\varphi/D^\varphi$ — R -группы. Структурный изоморфизм φ индуцирует структурный изоморфизм факторов $\mathfrak{G}/D$ и $\mathfrak{G}^\varphi/D^\varphi$, переводящий A/D в A^φ/D^φ . Согласно лемме 3, A^φ/D^φ инвариантна в $\mathfrak{G}^\varphi/D^\varphi$. Отсюда A^φ инвариантна в $\mathfrak{G}^\varphi$. Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 3. Теорема 1. Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^\varphi$ — две структурно-изоморфные группы, причем группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим инвариантным разрешимым рядом:

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_\alpha \subset \dots \subset A_\gamma = \mathfrak{G} \quad (*)$$

таким, что все $\mathfrak{G}/A_\alpha$ — R -группы. Тогда ряд

$$E = A_0^\varphi \subset A_1^\varphi \subset A_2^\varphi \subset \dots \subset A_\alpha^\varphi \subset \dots \subset A_\gamma^\varphi = \mathfrak{G}^\varphi \quad (*')$$

будет также инвариантным разрешимым в $\mathfrak{G}^\varphi$ и все $\mathfrak{G}^\varphi/A_\alpha^\varphi$ — R -группы.

Доказательство. Достаточно доказать инвариантность всех A_α^φ . Инвариантность A_1^φ следует из леммы 4. Пусть инвариантность A_β^φ установлена для всех $\beta < \alpha$. Если α предельное, то инвариантность A_α^φ очевидна. Пусть α не предельное. Тогда $A_{\alpha-1}^\varphi$ инвариантна в $\mathfrak{G}^\varphi$. φ индуцирует структурный изоморфизм $\mathfrak{G}/A_{\alpha-1}$ и $\mathfrak{G}^\varphi/A_{\alpha-1}^\varphi$, переводящий $A_\alpha/A_{\alpha-1}$ в $A_\alpha^\varphi/A_{\alpha-1}^\varphi$. По лемме 4 $A_\alpha^\varphi/A_{\alpha-1}^\varphi$ инвариантна в $\mathfrak{G}^\varphi/A_{\alpha-1}^\varphi$ и, значит, A_α^φ инвариантна в $\mathfrak{G}^\varphi$. Индукция проходит и, следовательно, теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^\varphi$ — две структурно-изоморфные группы. Пусть $\mathfrak{G}$ является R^* -группой, обладающей возрастающим инвариантным разрешимым рядом. Тогда: 1) $\mathfrak{G}^\varphi$ также R^* -группа, обладающая возрастающим инвариантным разрешимым рядом; 2) если H — инвариантная изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}$, то H^φ — инвариантная изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}^\varphi$; 3) если $I(K(\mathfrak{G}))$ — изолятор коммутанта группы $\mathfrak{G}$, то $I(K(\mathfrak{G}))^\varphi$ является изолятором коммутанта группы $\mathfrak{G}^\varphi$, т. е.

$$I(K(\mathfrak{G}))^\varphi = I(K(\mathfrak{G}^\varphi)).$$

Доказательство. 1) Так как $\mathfrak{G}$ — R^* -группа, то всякий инвариантный разрешимый ряд путем перехода к изоляторам можно превратить в изолированный инвариантный разрешимый ряд (4). Отсюда и из теоремы 1 следует наличие в $\mathfrak{G}^\varphi$ возрастающего инвариантного разрешимого ряда при условии, что таким рядом обладает $\mathfrak{G}$. Покажем, что $\mathfrak{G}^\varphi$ — R^* -группа. Пусть B — инвариантная изолированная подгруппа в $\mathfrak{G}^\varphi$. Нужно показать, что $\mathfrak{G}^\varphi/B$ — R -группа. Пусть A — подгруппа из $\mathfrak{G}$ такая, что $A^\varphi = B$. Покажем, что A инвариантна в $\mathfrak{G}$. Для этого проведем в B возрастающий изолированный разрешимый инвариантный в $\mathfrak{G}^\varphi$ ряд:

$$E = B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_\alpha \subset \dots \subset B_\gamma = B. \quad (**)$$

Это сделать можно. Далее рассмотрим ряд:

$$E = B_0^{\varphi^{-1}} \subset B_1^{\varphi^{-1}} \subset B_2^{\varphi^{-1}} \subset \dots \subset B_\alpha^{\varphi^{-1}} \subset \dots \subset B_\gamma^{\varphi^{-1}} = B^{\varphi^{-1}} = A, \quad (**')$$

(где φ^{-1} — обратный изоморфизм). Инвариантность A будем доказывать индукцией по длине ряда (**'). Так как $\mathfrak{G}$ — R -группа, то и $\mathfrak{G}^\varphi$ — R -группа. B_1 — инвариантная изолированная коммутативная подгруппа в $\mathfrak{G}^\varphi$. По лемме 4 этим свойством обладает и $B_1^{\varphi^{-1}}$ в $\mathfrak{G}$. Пусть уже доказано для всех $\beta < \alpha$, что все $B_\beta^{\varphi^{-1}}$ инвариантны в $\mathfrak{G}$. Если α предельное, то все ясно. Пусть α не предельное. Факторы $\mathfrak{G}/B_{\alpha-1}^{\varphi^{-1}}$ и $\mathfrak{G}^\varphi/B_{\alpha-1}$ структурно-изоморфны, причем существует структурный изоморфизм, переводящий $B_\alpha/B_{\alpha-1}$ в $B_\alpha^{\varphi^{-1}}/B_{\alpha-1}^{\varphi^{-1}}$. Так как $\mathfrak{G}$ — R^* -группа, то $\mathfrak{G}/B_{\alpha-1}^{\varphi^{-1}}$ — R -группа. Следовательно, и $\mathfrak{G}^\varphi/B_{\alpha-1}$ — R -группа. $B_\alpha/B_{\alpha-1}$ — инвариантная коммутативная изолированная подгруппа R -группы $\mathfrak{G}^\varphi/B_{\alpha-1}$. Отсюда, используя лемму 4 для обратного изоморфизма, получаем инвариантность $B_\alpha^{\varphi^{-1}}/B_{\alpha-1}^{\varphi^{-1}}$ в $\mathfrak{G}/B_{\alpha-1}^{\varphi^{-1}}$ и, следовательно, $B_\alpha^{\varphi^{-1}}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Таким образом и $B_\gamma^{\varphi^{-1}} = A$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Но $\mathfrak{G}/A$ — R -группа, структурно-изоморфная $\mathfrak{G}^\varphi/B$. Значит, и $\mathfrak{G}^\varphi/B$ — R -группа, т. е. $\mathfrak{G}^\varphi$ — R^* -группа.

2) Доказательство этого пункта содержится в предыдущем доказательстве. Непосредственно можно его получить так. В R^* -группе, обладающей возрастающим инвариантным разрешимым рядом, всякая инвариантная изолированная подгруппа является членом некоторого ряда вида (*) (4). Остальное следует из теоремы 1.

3) $I(K(\mathfrak{G}))^\varphi$ есть инвариантная изолированная подгруппа $\mathfrak{G}^\varphi$. Так как $\mathfrak{G}/I(K(\mathfrak{G}))$ — коммутативная группа без кручения, структурно-изоморфная $\mathfrak{G}^\varphi/I(K(\mathfrak{G}))^\varphi$, то и последняя группа коммутативна. Следовательно, $I(K(\mathfrak{G}^\varphi)) \subset I(K(\mathfrak{G}))^\varphi$. При помощи обратного изоморфизма получаем обратное включение.

Теорема доказана.

Поступило
30 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Г. Курош, Теория групп, М., 1944. ² А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953. ³ П. Г. Конторович, Матем. сборн., 22 (64), 79 (1948). ⁴ Б. И. Плоткин, Матем. сборн., 30 (72): 1, 197 (1952).