

Бл. ДОЛАПЧИЕВ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И КОСОМ ПРОТЕКАНИИ
ДВУХПАРАМЕТРОВЫХ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 14 VII 1954)

1. Н. Е. Кочин⁽¹⁾ показал, что шахматная вихревая дорожка неустойчива даже и при таких значениях ее измерений h и l , которые удовлетворяют условию

$$\operatorname{sh}(\kappa\pi) = 1, \quad \kappa = h/l = 0,280, \quad (1)$$

если иметь в виду смещения высшего порядка. Мы показали^(2,3), что при смещениях второго порядка она все еще остается устойчивой и что эта устойчивость имеет место и в случае двухпараметровых (асимметричных) вихревых дорожек (параметры $\kappa = h/l$ и $\lambda = d/l$, $d \neq 0$, $l/2$), которые подчиняются более общему условию

$$\operatorname{sh}(\kappa\pi) = \sin(\lambda\pi) \quad (2)$$

и при $\lambda = 1/2$ переходят в шахматные дорожки с условием устойчивости (1). При всех этих исследованиях был использован специальный закон о смещении вихрей, а именно, так называемое «группово-альтернативное смещение», при котором вихри с четным индексом получают в одной цепочке одни и те же смещения, а вихри с нечетным индексом — другие; при этом в каждой из двух цепочек эти смещения различны. Однако мы можем утверждать, что условия (1) или (2) при рассмотрении смещения данного порядка являются признаком устойчивости только в том случае, когда они получены не для некоторого специального, а для любого произвольного смещения.

Так как система, устойчивая при периодических смещениях, является устойчивой и при произвольных смещениях, то условия (1) и (2), полученные для специальных группово-альтернативных смещений Кочинным (для шахматных дорожек) и нами (для двухпараметровых дорожек), нуждаются в подтверждении и для случая самого общего периодического закона вида $\mu e^{ikh\varphi}$, где μ — функция времени t ; k — целое число от $-\infty$ до $+\infty$, которое обозначает номера вихрей, а φ — постоянная, которая определяет периодическое их перемещение.

В литературе⁽⁴⁻⁶⁾ давно известно несколько доказательств условия (1) для самого общего периодического смещения. В настоящей работе я хочу дать сравнительно простой вывод и условия (2) для смещения самого общего периодического закона; этот вывод при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1/2$ непосредственно приводит как к неустойчивости симметричных дорожек, так и к условию (1) устойчивости шахматных дорожек.

Насколько мне известно, условие (2) получил впервые Мауэ⁽⁷⁾, который вместо бесконечных сумм использовал функционально-теоретические средства, но допустил неправильное, по-моему, толкование протекания двухпараметровых вихревых дорожек, которое находим и в последнем издании «Лекций по теоретической физике» А. Зоммерфельда⁽⁸⁾; на этом вопросе я останавлиюсь в конце настоящей работы.

2. Исходным пунктом доказательства является линейризованная система дифференциальных уравнений, определяющих движения смещенных вихрей конфигурации, именно

$$\dot{\zeta}'_s = a\dot{\zeta}'_s + \dot{e}\zeta'_s + i\sum' b_k \dot{\zeta}'_k - \sum e_k \dot{\zeta}_k - i\sum c_k \dot{\zeta}_k, \quad (3)$$

$$\dot{\zeta}''_s = -a\dot{\zeta}''_s - \dot{e}\zeta''_s - i\sum' b_k \dot{\zeta}''_k + \sum e_k \dot{\zeta}_k + i\sum c_k \dot{\zeta}_k$$

$$(\zeta = \xi + i\eta; s = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty);$$

индекс ' относится к s -му вихрю верхней цепочки, а индекс '' к s -му вихрю нижней цепочки; смещенное асимметричное расположение вихрей выражается равенствами

$$z'_k = \zeta'_k + l(2k + \lambda) + ih, \quad z''_k = \zeta''_k + l(2k - \lambda) - ih, \quad (4)$$

а постоянные a, b, c, e даны, соответственно, бесконечными суммами

$$a = \frac{1}{4l^2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(k-s+\lambda)^2 - \kappa^2}{[(k-s+\lambda)^2 + \kappa^2]^2} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k-s^2} \right\}, \quad (5)$$

$$b_k = \frac{1}{4l^2} \frac{1}{(k-s)^2}, \quad b = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k, \quad (6)$$

$$e_k = \frac{1}{2l^2} \frac{\kappa(k-s+\lambda)}{[(k-s+\lambda)^2 + \kappa^2]^2}, \quad e = \sum_{-\infty}^{\infty} e_k, \quad (7)$$

$$c_k = \frac{1}{4l^2} \frac{(k-s+\lambda)^2 - \kappa^2}{[(k-s+\lambda)^2 + \kappa^2]^2}, \quad c = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k. \quad (8)$$

Вводим периодичность

$$\begin{aligned} \xi'_k &= \mu'_1 \cos(k + \lambda)\varphi, & \xi''_k &= \mu''_1 \cos(k - \lambda)\varphi, \\ \eta'_k &= \mu'_2 \cos(k + \lambda)\varphi, & \eta''_k &= \mu''_2 \cos(k - \lambda)\varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

зависящую от положения смещенных вихрей, при помощи которой система (3) приводится к конечной системе четырех дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями, а именно:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}'_1 &= \alpha\mu'_1 + \beta\mu'_2 + \gamma\mu''_1 + \delta\mu''_2, & \dot{\mu}'_2 &= \beta\mu'_1 - \alpha\mu'_2 + \delta\mu''_1 - \gamma\mu''_2, \\ \dot{\mu}''_1 &= -\gamma\mu'_1 - \delta\mu'_2 - \alpha\mu''_1 - \beta\mu''_2, & \dot{\mu}''_2 &= -\delta\mu'_1 + \gamma\mu'_2 - \beta\mu''_1 + \alpha\mu''_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ получаем выражения

$$\alpha = e = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{\sin 2\lambda\pi \cdot \operatorname{sh} 2\kappa\pi}{(\cos 2\lambda\pi - \operatorname{ch} 2\kappa\pi)^2}, \quad (11)$$

$$\beta = a + \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \frac{\cos(k - \lambda)\varphi}{\cos \lambda\varphi} = c - \frac{i}{4l^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \frac{\cos(k + \lambda)\varphi}{\cos \lambda\varphi}}{(k - s)^2}, \quad (12)$$

$$\gamma = - \sum_{-\infty}^{\infty} e_k \frac{\cos(k - \lambda)\varphi}{\cos \lambda\varphi}, \quad (13)$$

$$\delta = - \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \frac{\cos(k - \lambda)\varphi}{\cos \lambda\varphi}. \quad (14)$$

Частные решения системы (10) имеют вид $\dot{\mu}'_1 = M'_1 e^{\psi t}$, $\dot{\mu}'_2 = M'_2 e^{\psi t}$, $\dot{\mu}''_1 = M''_1 e^{\psi t}$, $\dot{\mu}''_2 = M''_2 e^{\psi t}$, где ψ вообще представляет собой комплексную величину, которая получается из уравнения

$$[\psi^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)]^2 + 4(\alpha\delta - \gamma\beta)^2 = 0 \quad (15)$$

или из

$$\psi^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2) \pm 2i(\alpha\delta - \gamma\beta). \quad (16)$$

Для того чтобы вихревая конфигурация была устойчивой, реальная часть ψ при всяком φ должна быть отрицательной. Следовательно, искомые условия устойчивых решений (10) при условии реальности значений α , β , γ , δ суть:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \quad (17)$$

и

$$(\alpha^2 - \gamma^2) + (\beta^2 - \delta^2) < 0. \quad (18)$$

При $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1/2$ (асимметричная дорожка) из (11) следует, что и $\alpha \neq 0$. Из (17) определяем $\delta = \beta\gamma/\alpha$, при помощи чего получаем выражение

$$\beta^2 - \delta^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - \gamma^2). \quad (19)$$

Теперь (18) приводится к более простому неравенству $\alpha^2 - \gamma^2 < 0$. При $\varphi = \pi$ бесконечные суммы (13) и (14) принимают вид

$$-\gamma = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e_k, \quad -\delta = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k c_k.$$

Из последних равенств находим

$$\alpha^2 - \gamma^2 = -\frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{\sin^2 \lambda\pi \cdot \operatorname{sh}^2 \kappa\pi}{(\cos^2 \lambda\pi - \operatorname{ch}^2 \kappa\pi)^2}. \quad (20)$$

Это показывает, что действительно $\alpha^2 - \gamma^2 < 0$.

Если вернемся к условию (17), то оказывается, что, когда $\beta = 0$, оно удовлетворяется тождественно, так как теперь и $\delta = 0$. Но из (12) имеем $\beta = c - \pi^2/8l^2 = 0$, а из равенства (8) определяем

$$c = \frac{\pi^2}{2l^2} \frac{1 - \cos(2\lambda\pi) \operatorname{ch}(2\kappa\pi)}{(\cos 2\lambda\pi - \operatorname{ch} 2\kappa\pi)^2}. \quad (21)$$

Итак, искомое условие устойчивости получает вид

$$\operatorname{ch}^2(\kappa\pi) + \cos^2(\lambda\pi) = 2, \quad (22)$$

которое в сущности совпадает с условием (2).

Если примем $\alpha = 0$, что имеет место для частных случаев $\lambda = 0$ (симметричная дорожка) и $\lambda = 1/2$ (шахматная дорожка), то и $\gamma = 0$, т. е. требование (17) снова удовлетворяется тождественно. При $\lambda = 0$ неустойчивость следует из того, что теперь выражение $\beta^2 - \gamma^2$, которое на основании (18) должно быть отрицательным, имеет значение $1/64 (\pi/l)^4 > 0$. При $\lambda = 1/2$ условие (18) приводит к $\beta^2 - \delta^2 \leq 0$, в котором знак равенства следует из того, что выражение

$$\beta^2 - \gamma^2 = \frac{1}{64} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{(2 - \cos^2 \lambda\pi - \operatorname{ch}^2 \kappa\pi)^2}{(\cos^2 \lambda\pi - \operatorname{ch}^2 \kappa\pi)^2} > 0 \quad (23)$$

при $\beta = 0$ тоже равно 0. Но теперь числитель выражения (23) — не что иное, как условие $\operatorname{ch} \kappa\pi = \sqrt{2}$, или, что одно и то же, условие (1), из которого при небольших смещениях первого или второго порядка собственно следует индифферентность шахматной дорожки.

3. Принятие асимметричного расположения вихрей имеет своим следствием (полученным из (3) и (4) при $\xi_k = 0 = \eta_k$) вертикальный не равный нулю компонент скорости дорожки, один и тот же для всех вихрей как верхней, так и нижней вихревой цепочки, а именно:

$$V_a = \frac{\pi}{2l} \frac{\sin(2\lambda\pi)}{\cos(2\lambda\pi) - \operatorname{ch}(2\kappa\pi)}, \quad (24)$$

который только при $\lambda = 0, 1/2$ равен нулю. Это означает, что только при симметричном и шахматном расположении вихрей вихревая дорожка движется по направлению всего течения жидкости соответственно со скоростями $U_s = \frac{\pi}{2l} \operatorname{cth}(\kappa\pi)$ и $U_z = \frac{\pi}{2l} \operatorname{th}(\kappa\pi)$, полученными или непосред-

ственно или из горизонтального компонента $U_a = \frac{\pi}{2l} \frac{\operatorname{sh}(2\kappa\pi)}{\operatorname{ch}(2\kappa\pi) - \cos(2\lambda\pi)}$ асимметричного положения, до тех пор, пока при этом расположении дорожка движется косо. Другими словами, асимметричное положение вихрей в конфигурации подвергает дорожку трансляции. Действительно, вследствие постоянства U_a , V_a ее косое протекание нужно понимать только в том смысле, что ось симметрии бесконечной дорожки, сохраняя постоянное направление — направление всего движения, смещается параллельно самой себе.

Наоборот, Мауэ, имея в виду $V_a \neq 0$, заключает, что эта ось принимает наклонное положение к направлению скорости V_∞ с одной или другой его стороны, т. е. что сама вихревая дорожка располагается под углом к направлению всего течения жидкости. В том же смысле на стр. 228 «Лекций по теоретической физике» А. Зоммерфельда читаем: «Наш фотографический снимок 47 b, к сожалению, не указывает нам ясно наклоненного направления образующейся вихревой дорожки, но не говорит нам и о противоположном». И дальше: «... Можно ожидать, что экспериментальная проверка, которая выполнена Карманом и Рубахом для «прямых» вихревых дорожек, подтвердит условие устойчивости и для «косых» вихревых дорожек...».

Я хочу подчеркнуть, что на основании указанного нами характера косого протекания бесконечной асимметричной вихревой дорожки, как трансляции, первая цитата не основывается на каком-либо теоретическом выводе, а если основывается на условии (24), т. е. на результате $V_a \neq 0$, то она неверна. Сделанные по моей инициативе в Будапештском аэродинамическом институте попытки получить опытным путем дорожки, наклоненные по отношению V_∞ , например при наклонном, а не прямом положении пластинки (или в случае какого-либо несимметричного тела, как предлагает Мауэ, ⁽⁷⁾, фиг. 7, стр. 137), привели к отрицательным результатам, т. е. такого отклонения не обнаружено.

В сообщении ⁽⁹⁾ я показал, что симметричные дорожки, устойчивые при условии (2), являются скорее всего переходным состоянием к шахматным дорожкам, устойчивым при условии (1); эти промежуточные дорожки постепенно увеличивают свою ширину и уменьшают свою скорость до тех пор, пока не перейдут в шахматное расположение — в самые широкие и самые медленные из всех устойчивых вихревых образований. При этом в течение всего времени этого перехода ось вихревой конфигурации совсем не изменяет своего наклона по отношению V_∞ , а только отодвигается в сторону от оси симметрии цилиндра течения, сохраняя при этом перемещении направление, параллельное самой себе; лишь только дорожка при этом переходе займет шахматное расположение Кармана, она начинает и продолжает двигаться прямо — по направлению течения.

Математический институт
София, Болгария

Поступило
30 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Е. Кочин, ДАН, 24, № 1 (1939). ² Бл. Долапчиев, ZAMM, 17 (1937).
³ Бл. Долапчиев, Год. Соф. унив., 39 (1942); ДАН, 77, № 6 (1951). ⁴ Г. Ламб, Гидромеханика, 7, 1947, стр. 81. ⁵ Фукс, Хопф, Зеевальд, Аэродинамика, 2, 1935, стр. 239. ⁶ Г. Вилля, Теория вихрей, 4, 1936, стр. 53. ⁷ А. В. Мауэ, ZAMM, 20 (1940). ⁸ А. Зоммерфельд, Теоретическая физика, 2, 2-е изд., 1949, стр. 228.
⁹ Бл. Долапчиев, ДАН, 78, № 2 (1951).