

Е. П. ПОПОВ

УТОЧНЕНИЕ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 9 VI 1954)

В предыдущей заметке автора ⁽⁵⁾ был изложен приближенный способ определения одночастотных автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем автоматического регулирования. Этот способ представляет соединение метода гармонического баланса Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова ⁽¹⁻³⁾ с методом нахождения границ устойчивости линейных систем ⁽⁴⁾, вытекающим из критерия А. В. Михайлова. Рассматривались только первые гармоники для всех переменных, причем первая гармоника нелинейной функции вычислялась на основании только первой гармоники аргумента. В настоящей заметке проводится уточнение решения в тех случаях, когда при вычислении первой гармоники нелинейной функции (гармоническая линеаризация) необходимо учитывать высшие гармоники аргумента.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0 \quad \left(p \equiv \frac{d}{dt}\right), \quad (1)$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — операторные многочлены любой степени; $F(x, px)$ — нелинейная функция. Первая гармоника функции F будет определяться, вообще говоря, не только первой гармоникой x , но еще и некоторыми комбинационными членами от всех гармоник x . Следовательно, приведенные в заметке ⁽⁵⁾ формулы гармонической линеаризации, т. е. формулы для коэффициентов q , q_1 и т. п., справедливы при условии, что указанные комбинационные члены не играют существенной роли в решении задачи. В частности, это имеет место, если амплитуды высших гармоник x достаточно малы по сравнению с первой, например, когда переменная x «выходит» из линейной части системы, обладающей свойством слабого пропускания высших гармоник. Для некоторых нелинейных систем малое влияние комбинационных членов может иметь место и в других случаях, в частности, и тогда, когда аргумент нелинейной функции представляет собой выходную величину нелинейного звена. Если же вышеуказанные комбинационные члены имеют существенное значение, то формулы гармонической линеаризации нужно несколько видоизменить.

Пусть искомое периодическое решение уравнения (1) записывается в виде ряда Фурье, причем существенное значение имеет ограниченное число n гармоник:

$$x = x_1 + \sum_{h=2}^n x_h, \quad x_1 = a \sin \omega t, \quad x_h = a_h \sin (k\omega t + \varphi_h). \quad (2)$$

Для функции $F(x, pt)$, удерживая то же число гармоник, имеем разложение

$$F(x, px) = \left(q_0 + \frac{q_{1*}}{\omega} p \right) x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi a_k} \left(r_k \cos \varphi_k + s_k \sin \varphi_k + \frac{s_k \cos \varphi_k - r_k \sin \varphi_k}{k\omega} p \right) x_k, \quad (3)$$

где, обозначая $u = \omega t$,

$$q_0 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \sin u \, du, \quad q_{1*} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \cos u \, du, \quad (4)$$

$$r_k = \int_0^{2\pi} F \sin ku \, du, \quad s_k = \int_0^{2\pi} F \cos ku \, du \quad (k = 2, \dots, n). \quad (5)$$

Подставив (2) и (3) в уравнение (1), разобьем его на n отдельных уравнений. Тогда первой гармонике будет соответствовать характеристическое уравнение

$$Q(p) + \left(q_0 + \frac{q_{1*}}{\omega} p \right) R(p) = 0, \quad (6)$$

а высшим гармоникам — характеристические уравнения

$$Q(p) + \frac{1}{\pi a_k} \left(r_k \cos \varphi_k + s_k \sin \varphi_k + \frac{s_k \cos \varphi_k - r_k \sin \varphi_k}{k\omega} p \right) R(p) = 0 \quad (k = 2, \dots, n). \quad (7)$$

Чтобы иметь возможность довести решение задачи до конца, предлагается упрощенный прием, базирующийся, по рекомендации Н. Н. Боголюбова, на следующих двух положениях:

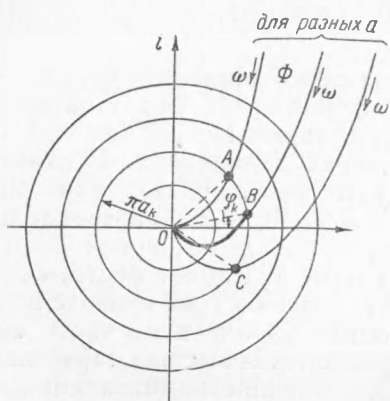


Рис. 1

1) производя уточнение первого приближения путем учета высших гармоник аргумента x нелинейной функции, будем считать, что первая (основная) гармоника x превалирует над остальными, так что при вычислении первой гармоники нелинейной функции под интегралами (4) можно полагать приближенно

$$F(x, px) = F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^0 \sum_{k=2}^n x_k + \left(\frac{\partial F}{\partial px} \right)^0 \sum_{k=2}^n px_k, \quad (8)$$

где индекс 0 означает подстановку $x = a \sin u$, $px = a\omega \cos u$;

2) при вычислении высших гармоник можно ограничиться меньшей степенью точности и под интегралами (5) полагать

$$F = F^0 = F(a \sin u, a\omega \cos u). \quad (9)$$

Тогда коэффициенты q_0 и q_{1*} первой гармоники нелинейной функции $F(x, px)$ примут вид

$$q_0 = q + q', \quad q_{1*} = q_1 + q'_1, \quad (10)$$

где q и q_1 — прежние коэффициенты первого приближения ⁽⁵⁾, зависящие от a и ω , а q' и q'_1 — новые добавки (уточнение первой гармоники):

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial p x} \right)^0 p \right] \sum_{k=2}^n x_k \sin u \, du,$$

$$q'_1 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial p x} \right)^0 p \right] \sum_{k=2}^n x_k \cos u \, du,$$

определяемые высшими гармониками переменной x и зависящие от всех a_k, φ_k .

Что касается коэффициентов r_k, s_k высших гармоник функции F , то, согласно (5) и (9), каждый из них будет зависеть от a, ω и от a_k, φ_k только данной гармоники. Подставив в (7) $p = ik\omega$, приходим к выражению

$$\pi a_k e^{i\varphi_k} = \Phi(a, \omega), \quad (11)$$

где

$$\Phi(a, \omega) = - \frac{(r_k + is_k) R(ik\omega)}{Q(ik\omega)}. \quad (12)$$

На комплексной плоскости строим серию кривых Φ для различных значений a (рис. 1). Проведя на том же графике окружность произвольным радиусом πa_k , мы, согласно (11), в точках ее пересечения A, B, C с кривыми Φ найдем значения фазы φ_k для разных значений a .

Полученный результат наносим на плоскость с координатами a_k, φ_k в виде точек A_1, B_1, C_1 (см. рис. 2), около которых надписываем значения ω , взятые из точек A, B, C . Проведя на рис. 1 ряд окружностей различными радиусами πa_k , получим на рис. 2 еще ряд точек. В результате найдем искомую зависимость a_k и φ_k от a и ω в виде кривых рис. 2. Такой график строится отдельно для каждой из учитываемых высших гармоник по тем же формулам (11), (12).

Следовательно, теперь задача определения a и ω основной гармоники сводится к исследованию только одного уравнения (6), так же как и в первом приближении ⁽⁵⁾, но с использованием добавочных графически заданных соотношений $a_k(a, \omega)$ и $\varphi_k(a, \omega)$ в виде рис. 2, учитывающих влияние высших гармоник. Вычисление a и ω рекомендуется при этом производить следующим образом.

Уравнение (6) в результате подстановки $p = i\omega$ и выделения вещественной и мнимой частей запишем в виде

$$X(\omega, q_*, q_{1*}) = 0, \quad Y(\omega, q_*, q_{1*}) = 0, \quad (13)$$

откуда легко выразить

$$q_* = f_1(\omega), \quad q_{1*} = f_2(\omega). \quad (14)$$

Далее задаемся произвольным значением a . Это соответствует определенной кривой на рис. 2, с которой и возьмем значения величин $a_k(\omega)$ и $\varphi_k(\omega)$, после чего по формулам (4) (с подстановкой (8)) вычис-

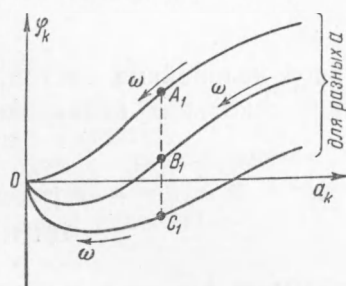


Рис. 2

ляем q_* и q_{1*} . В результате получаем серию кривых $q_*(\omega)$ и $q_{1*}(\omega)$ для разных a (см. рис. 3). Затем на этих графиках наносим кривые $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ согласно (14).

Решением всей задачи будет такое значение ω , при котором на рис. 3 кривые $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ пересекаются с кривыми $q_*(\omega)$ и $q_{1*}(\omega)$, соответствующими одному и тому же значению a .

Этим определяются уточненные значения амплитуды a и частоты ω первой гармоники периодического решения. Зная их, далее из графиков типа рис. 2 берем значения a_k и φ_k для высших гармоник. В результате полностью будет определено искомое периодическое решение (2).

В данной заметке рассматривалось нелинейное уравнение (1). Однако изложенные приемы можно применить при уточнении первого приближения и для других

типов нелинейных систем, указанных в (5), в том числе и при наличии нескольких нелинейностей.

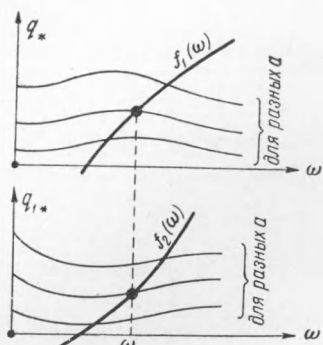


Рис. 3

Поступило
8 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Новые методы нелинейной механики, Киев, 1934. ² Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937. ³ Н. Н. Боголюбов, Сборн. тр. Инст. строит. мех. АН УССР, № 10 (1949). ⁴ А. А. Соколов, Инж. сборн., 2, в. 2, 8 (1946). ⁵ Е. П. Попов, ДАН, 95, № 5 (1954).