

М. А. КРЕЙНЕС и Н. Д. АЙЗЕНШТАТ

О ВОЗМОЖНОСТИ НОМОГРАФИРОВАНИЯ С ТОЧНОСТЬЮ ДО МАЛЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 II 1954)

В настоящей работе рассматриваются номограммы из выравненных точек; всюду предполагается при этом, что функции $u = X_1(x)$, $v = X_2(x)$, $u = Y_1(y)$, $v = Y_2(y)$, $u = Z_1(z)$, $v = Z_2(z)$, задающие шкалы номограммы, достаточное число раз дифференцируемы и, кроме того, что выполняется условие $Z_1^2 + Z_2^2 > 0$ в каждой точке шкалы z . Геометрически последнее означает, что отметки на шкале z расположены «не чересчур часто» и что шкала z (ответная) в каждой точке имеет определенную касательную.

Тройку чисел (x_0, y_0, z_0) назовем обыкновенной точкой номограммы, если: 1) точка x_0 шкалы x , точка y_0 шкалы y и точка z_0 шкалы z лежат на одной прямой; 2) никакие две из точек x_0, y_0, z_0 не совпадают и 3) разрешающая прямая (x_0, y_0, z_0) в точке z_0 не касается ответной шкалы z (см. рис. 1).

Если точка (x_0, y_0, z_0) — обыкновенная точка номограммы и если ограничиться достаточно малыми участками шкал, содержащими точки с отметками x_0 , соответственно y_0, z_0 , а остальное стереть, то оставшаяся номограмма будет устанавливать соотношение

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & 1 \\ Y_1(y) & Y_2(y) & 1 \\ Z_1(z) & Z_2(z) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

определяющее в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функцию $N(x, y)$ ($N(x_0, y_0) = z_0$), дифференцируемую в этой точке столько же раз, сколько раз дифференцируемы элементы определителя (1).

Про функцию $z = N(x, y)$ будем говорить, что она номографируема в окрестности точки (x_0, y_0) , если существует номограмма, имеющая точку (x_0, y_0, z_0) своей обыкновенной точкой, определяющая в некоторой окрестности (x_0, y_0) функцию $z = N(x, y)$.

Будем говорить, что функция $z = f(x, y)$ номографируется в окрестности точки (x_0, y_0) с точностью до малых k -го порядка, если существует функция $z = N(x, y)$, номографируемая в этой окрестности и такая, что

$$f(x, y) - N(x, y) = O(\rho^k), \quad \text{где } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Будем предполагать при этом, что элементы определителя (1), задающего функцию $N(x, y)$, k раз дифференцируемы в точке x_0, y_0, z_0 . Впредь для краткости будем считать $x_0 = y_0 = z_0$.

1. Можно показать, что всегда существует проективное преобразование плоскости (u, v) (см. рис. 1 и 2), приводящее определитель (1) к виду

$$\Delta(x, y, z) \equiv \begin{vmatrix} a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + o(x^k) & 1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \dots + \alpha_kx^k + o(x^k) & 1 \\ b_1y + b_2y^2 + \dots + b_ky^k + o(y^k) & -1 + \beta_1y + \beta_2y^2 + \dots + \beta_ky^k + o(y^k) & 1 \\ \frac{1}{2}z + c_3z^3 + \dots + c_kz^k + o(z^k) & \gamma_2z^2 + \gamma_3z^3 + \dots + \gamma_kz^k + o(z^k) & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Впредь под $\Delta(x, y, z)$ будем понимать определитель (2).

Легко доказывается следующее утверждение:

Пусть $\Delta[x, y, f(x, y)] = O(\rho^k)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда $f(x, y)$ номографируема в окрестности точки $(0, 0)$ с точностью до малых k -го порядка, и обратно, если $f(x, y)$ номографируется в окрестности точки $(0, 0)$ с точностью до малых k -го порядка, то существует такой определитель $\Delta(x, y, z)$, что $\Delta[x, y, f(x, y)] = O(\rho^k)$.

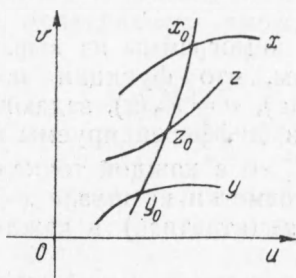


Рис. 1

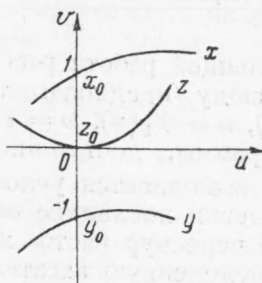


Рис. 2

В силу сказанного вопрос о номографировании с точностью до малых k -го порядка сводится к вопросу об определении коэффициентов $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i \leq k$) в определителе (2) так, чтобы

$$\Delta[x, y, f(x, y)] = O(\rho^k).$$

2. Пусть $X(x), Y(y), Z(z)$ — три функции, k раз дифференцируемые в точке $(0, 0, 0)$ такие, что $X(0) = Y(0) = Z(0)$, $X'(0) \neq 0$, $Y'(0) \neq 0$, $Z'(0) \neq 0$. Тогда $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $Z = Z(z)$ устанавливают непрерывное и однозначное соответствие между окрестностями точек $O(0, 0, 0)$ и $O'(0, 0, 0)$ в пространствах X, Y, Z и x, y, z .

Заметим, что в этих предположениях существует обратное преобразование $x = x(X)$, $y = y(Y)$, $z = z(Z)$; функции $x(X)$, $y(Y)$, $z(Z)$ также k раз дифференцируемы в точке $(0, 0, 0)$. Такие преобразования назовем допустимыми.

Очевидно:

Если функция $z = f(x, y)$ номографируется с точностью до малых k -го порядка, то функция $Z = F(X, Y)$, полученная из функции $z = f(x, y)$ при помощи допустимого преобразования, обладает этим же свойством.

Произвольная k раз дифференцируемая в точке $(0, 0)$ функция двух переменных $z = f(x, y)$ ($f(0, 0) = 0$) может быть представлена так:

$$z = f(x, y) = p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + \dots + p_{0k}y^k + o(\rho^k), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

Можно доказать следующее:

Пусть $z = f(x, y)$ — функция вида (3), где $p_{10} \neq 0$, $p_{01} \neq 0$. Существует допустимое преобразование такое, что полученная после

этого преобразования функция имеет вид:

$$Z = X + Y + XY(X - Y)(q_{00} + q_{10}X + q_{01}Y + q_{20}X^2 + \dots + q_{0,k-3}Y^{k-3}) + O(\bar{\rho}^k),$$

$$\bar{\rho} = \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (4)$$

Из последнего утверждения следует, что исследование вопроса о возможности номографирования в окрестности точки $(0, 0)$ той или иной функции z , удовлетворяющей условиям $z'_x(0, 0) \neq 0$, $z'_y(0, 0) \neq 0$ с точностью до малых k -го порядка, всегда приводится к такому же вопросу, отнесенному к функции вида (4). Всюду ниже будем предполагать, что функция $z = f(x, y)$ имеет вид (4).

3. Допустим, что функция вида (4) номографируется с точностью до малых k -го порядка. Тогда, согласно сказанному выше, при надлежащем подборе коэффициентов $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ будет иметь место равенство

$$\Delta(x, y, z) = O(\rho^k). \quad (5)$$

Подставляем (4) в определитель $\Delta(x, y, z)$ и в получившемся выражении приравняем нулю коэффициенты при $x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots, y^5$.

Благодаря этому приходим к соотношениям, показывающим, что каждый из коэффициентов $a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5, c_3, c_4, c_5, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_3, \beta_4, \gamma_2$ и γ_4 есть целая рациональная функция величин $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3, q_{00}, q_{10}, \dots, q_{02}$. Указанные соотношения дают возможность построить номограмму, осуществляющую номографирование данной функции с точностью до малых 6-го порядка. Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$, а также величины $O(x^6), O(y^6), O(z^6)$ остаются здесь произвольными.

Таким образом: *любая 6 раз дифференцируемая в некоторой точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$, у которой $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, номографируется в окрестности этой точки с точностью до малых 6-го порядка.*

4. Приравнивание нулю коэффициентов при членах 6-й степени в определителе (5) приводит к 7 уравнениям, содержащим всего 6 не входивших ранее коэффициентов $a_6, b_6, c_6, \alpha_5, \beta_5, \gamma_5$; это дает нам одно соотношение между прежде произвольными $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$; оно имеет вид:

$$\begin{aligned} & -4q_{00}(q_{10} + q_{01}) - 2(q_{30} - q_{03}) + 5(q_{21} - q_{12}) + 2(q_{20} + q_{02})\alpha_1 - \\ & - 2q_{11}\alpha_1 + (5/2q_{10} - q_{01})\alpha_2 + (-q_{10} + 5/2q_{01})\beta_2 - 16q_{00}\gamma_3 - 7/4(q_{10} - q_{01})\alpha_1^2 - \\ & - 5/6q_{00}\alpha_1^3 + 2/3q_{00}\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2) = 0. \end{aligned} \quad (A)$$

Соотношению (A) не всегда можно удовлетворить. Пусть, например, $z = x + y + x^2y^2(x - y)^2$. Эта функция имеет вид (4). Составленное для нее соотношение (A) не выполняется ни при каких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$, и, следовательно, функцию $z = x + y + x^2y^2(x - y)^2$ нельзя номографировать в окрестности точки $(0, 0)$ с точностью до малых 7-го порядка.

Легко видеть, что уравнение (A) с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$ не имеет решений в том и только в том случае, когда одновременно выполняются следующие условия:

$$q_{00} = q_{10} = q_{01} = q_{20} + q_{02} - q_{11} = 0, \quad 2(q_{30} - q_{03}) - 5(q_{21} - q_{12}) \neq 0. \quad (6)$$

Условия (6) являются, таким образом, условиями того, что функция вида (4) не номографируется с точностью до малых 7-го порядка.

Если хоть одно из этих условий не выполнено, то легко можно построить определитель $\Delta(x, y, z)$, осуществляющий номографирование рассматриваемой функции в окрестности точки $(0, 0)$.

Заметим, что «как правило» 7 раз дифференцируемая функция номографируема с точностью до малых 7-го порядка; ведь не номографируемы только те функции, которые удовлетворяют 5 соотношениям (6).

5. Приравнивание нулю коэффициентов при членах 7-й степени определителя (5) дает 8 соотношений между новыми коэффициентами $a_7, b_7, c_7, \alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ и входившими ранее $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$. Эти 8 равенств определяют коэффициенты $a_7, b_7, c_7, \alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ и, кроме того, приводят к 2 соотношениям между $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$:

$$5(q_{40} - q_{04}) - 8(q_{31} - q_{13}) + \dots = 0; \quad (B_1)$$

$$5(q_{40} + q_{04}) - 14(q_{31} + q_{13}) + 18q_{22} + \dots = 0. \quad (B_2)$$

Не выписанные явно члены являются целыми рациональными функциями величин $q_{00}, q_{10}, q_{01}, q_{20}, q_{11}, q_{02}, q_{30}, q_{12}, q_{21}, q_{03}$ и $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$. Эти функции обращаются в тождественный нуль при

$$q_{00} = q_{10} = q_{01} = q_{20} = q_{11} = q_{02} = q_{30} = q_{21} = q_{12} = q_{03} = 0.$$

Необходимым и достаточным условием номографируемости функции вида (4) с точностью до малых 8-го порядка является наличие действительного решения $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$ у трех уравнений (A), (B₁) и (B₂) с 4 неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$.

Легко видеть, как в случае совместности условий (A), (B₁) и (B₂) построить определитель, осуществляющий номографирование с точностью до малых 8-го порядка.

Примером функции, номографируемой с точностью до малых 7-го порядка, но не номографируемой с точностью до малых 8-го порядка, служит функция $z = x + y + x^2 y^2 (x - y)^3$.

Условие (A) для этой функции выполнено (обратилось в тождество), а условия (B₁) и (B₂) не выполняются ни при каких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$. В самом деле, условие (B₁), примененное к этой функции, приводит к противоречию.

6. Приравнявая нулю коэффициенты при членах 8-й степени в равенстве (5), получим 9 соотношений между $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$ и $a_8, b_8, c_8, \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$. Эти 9 соотношений позволяют выразить $a_8, b_8, c_8, \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$ через $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$ и, кроме того, приводят к 3 соотношениям между $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$. Обозначим их, соответственно, через (C₁), (C₂) и (C₃).

Необходимым и достаточным условием номографируемости функции вида (4) с точностью до малых 9-го порядка является наличие системы действительных значений $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_3$, удовлетворяющей 6 уравнениям (A), (B₁), (B₂), (C₁), (C₂) и (C₃).

Условие номографируемости с точностью до малых 9-го порядка приводит к 2 соотношениям между величинами q_{ik} ($i + k \leq 5$). Этим 2 соотношениям должны удовлетворять величины q_{ik} любой номографируемой функции вида (4). Заметим, что отсюда следует, что любая достаточно гладкая номографируемая функция должна удовлетворять 2 дифференциальным уравнениям 8-го порядка.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 II 1954