

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОМ НОВОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 II 1954)

1°. Пусть

$$E_{\rho}(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} \quad (\rho \geq 1/2, -\infty < \mu < +\infty) \quad (1)$$

целая функция типа Миттаг-Лефлера.

Теорема 1. Если $\rho \geq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, то для любой функции $g(y)$ из класса $g(y)y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$ формула

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{V_{2\pi\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm iy} g(y) y^{\mu-1} dy \quad (2)$$

определяет почти всюду функции $f^{(+)}(x)$ и $f^{(-)}(x)$, принадлежащие к классу $L_2(0, +\infty)$. Двойственная формула

$$g(y) y^{\mu-1} = \frac{1}{V_{2\pi\rho}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \left[y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho}(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu+1) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx \right] + \right. \\ \left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \left[y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho}(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu-1) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx \right] \right\} \quad (3)$$

также имеет место почти всюду на $(0, +\infty)$, при этом справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} |g(y)|^2 y^{2\mu-2} dy = \rho \int_0^{\infty} |f^{(+)}(x)|^2 dx + \rho \int_0^{\infty} |f^{(-)}(x)|^2 dx. \quad (4)$$

Теорема 2. Для любой функции $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ формула

$$g^{(\pm)}(y) y^{\mu-1} = \frac{1}{V_{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \left\{ y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho}(x^{\frac{1}{\rho}} y^{\frac{1}{\rho}} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu+1) x^{\mu-1} f(x) dx \right\}, \quad (5)$$

где $\rho \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функции $g^{(+)}(y) y^{\mu-1}$ и $g^{(-)}(y) y^{\mu-1}$, принадлежащие к классу $L_2(0, +\infty)$. Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{V_{2\pi\rho}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} g^{(+)}(y) y^{\mu-1} dy + \right. \\ \left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{ixy} - 1}{iy} g^{(-)}(y) y^{\mu-1} dy \right\} \quad (6)$$

* Известные теоремы М. Планшереля (1) о косинус- и синус-преобразованиях Фурье в классе $L_2(0, +\infty)$ следуют из результата теоремы 1 при частных предположениях, когда, соответственно, $\rho = 1/2$, $\mu = 1$ и $\rho = 1/2$, $\mu = 2$.

также имеет место почти всюду на $(0, +\infty)$. Существуют постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от функций $f(x)$ и $g^{(\pm)}(x)$, такие, что

$$\int_0^{\infty} |g^{(\pm)}(y)|^2 y^{2\mu-2} dy \leq M_1 \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq M_2 \left\{ \int_0^{\infty} |g^{(+)}(y)|^2 y^{2\mu-2} dy + \int_0^{\infty} |g^{(-)}(y)|^2 y^{2\mu-2} dy \right\}. \quad (8)$$

Отметим, что из теоремы 2 также следуют известные предложения о косинус- и синус-преобразованиях Фурье. Наконец, при $\rho = \mu = 1$ обе теоремы содержат, в частности, теорему Планшереля о преобразовании Фурье для класса функций $L_2(0, +\infty)$.

2°. Теоремы 1 и 2 позволяют установить следующее предложение.

Теорема 3. Пусть $\rho \geq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{\rho}{2}$. Если $g_1(y)$ — произвольная функция из класса $\int_0^{\infty} |g_1(y)|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1} dy < +\infty$, то функции

$$f^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm ixy^\rho} - 1}{\pm iy^\rho} g_1(y) y^{\mu\rho-1} dy \quad (9)$$

принадлежат к классу $L_2(0, +\infty)$. Целые функции порядка ρ и типа $\sigma > 0$, определяемые по формуле

$$G_\sigma(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho(x^\rho z e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho(x^\rho e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} z; \mu) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx \quad (10)$$

в среднем сходятся к $g_1(y)$, когда $\sigma \rightarrow +\infty$, в смысле

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} |g_1(y) - G_\sigma(y)|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1} dy = 0. \quad (11)$$

Когда $\rho \geq 1$, для функций $G_\sigma(z)$ справедливо также утверждение

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} |G_\sigma(y e^{i\varphi})|^2 y^{2\mu\rho-\rho-1} dy = 0, \quad \frac{\pi}{\rho} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}. \quad (12)$$

При помощи теоремы 3 представляется возможным построить аппарат интеграла Фурье для произвольной конечной системы лучей, исходящих из начала координат. При этом устанавливается, что на такой системе лучей к произвольной функции класса L_2 можно в среднем приблизиться целыми функциями, тип которых стремится к бесконечности. Обозначим через $\{L\}$ совокупность лучей l_k : $\arg z = \varphi_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$); $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$, исходящих из начала координат, и пусть $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{kn} - \varphi_k} \right\}$.

Теорема 4. Пусть $\rho \geq \alpha$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$. Для произвольной функции $F(z)$, определенной на $\{L\}$ и удовлетворяющей условию

$$\int_{\{L\}} |F(z)|^2 |z|^{2\mu\rho - \rho - 1} d|z| < +\infty, \quad (13)$$

существуют целые функции $G_\sigma(z)$ порядка ρ и типа σ , для которых

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\{L\}} |F(z) - G_\sigma(z)|^2 |z|^{2\mu\rho - \rho - 1} d|z| = 0. \quad (14)$$

Если обозначим

$$f_k^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{\pm i x r^\rho} - 1}{\pm i r^\rho} F(re^{i\varphi_k}) r^{\mu\rho - 1} dr \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

то $f_k^{(\pm)}(x) \in L_2(0, +\infty)$, и целые функции $G_\sigma(z)$ определяются так:

$$G_\sigma(z) = \sum_{k=1}^n G_\sigma^{(k)}(z), \quad (16)$$

где

$$G_\sigma^{(k)}(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{V_{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} z e^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi_k\right)}; \mu\right) x^{\mu-1} f_k^{(-)}(x) dx + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{V_{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho\left(x^{\frac{1}{\rho}} z e^{-i\left(\frac{\pi}{2\rho} + \varphi_k\right)}; \mu\right) x^{\mu-1} f_k^{(+)}(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

3°. Теоремы об обобщенных преобразованиях, приведенные выше, позволяют существенно дополнить ряд результатов нашей работы (2) о представлении целых функций конечного порядка и нормального типа, квадрат модуля которых интегрируем по лучам в комплексной области. Обозначим через R_σ совокупность целых функций $f(z)$ порядка $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$ и типа $\leq \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty \left| f\left(t e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right) \right|^2 t^{2\mu\rho - \rho - 1} dt < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (18)$$

Теорема 5. Класс R_σ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(vz; \mu) \psi(v) v^{\mu\rho - 1} dv, \quad (19)$$

где $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ и $\int_0^{\sigma^{1/\rho}} |\psi(v)|^2 v^{\rho - 1} dv < +\infty$.

Обозначим через Y_σ класс целых функций порядка $\rho \geq \frac{1}{2}$ и типа $\leq \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |f(te^{i\alpha})|^2 t^{2\mu\rho - \rho - 1} dt < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} \right) \quad (20)$$

при $\frac{\pi}{2\rho} \leq \alpha \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$.

Теорема 6. Класс Y_σ совпадает с классом целых функций $f(z)$ допускающих представление в виде

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{1/p}} E_p(vz; \mu) \psi(v) v^{\mu p - 1} dv, \quad (21)$$

$$\text{где } \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \text{ и } \int_0^{\sigma^{1/p}} |\psi(v)|^2 v^{p-1} dv < +\infty.$$

Отнесем к классу M_σ все целые функции $f(z)$ порядка ρ ($2 \leq \rho < 2$) и типа $\leq \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{\pm i\frac{\pi}{2}\left(1 \pm \frac{1}{p}\right)}\right) \right|^2 t^{2\mu p - p - 1} dt < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right). \quad (22)$$

Теорема 7. Класс M_σ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = \int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} E_p(ivz; \mu) \psi(v) v^{\mu p - 1} dv, \quad (23)$$

$$\text{где } \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \text{ и } \int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} |\psi(v)|^2 |v|^{p-1} dv < +\infty.$$

Из этой теоремы при $\mu = \rho = 1$ следует результат Палей и Винера⁽³⁾ о представлении целых функций экспоненциального типа.

Обозначим через $A_\sigma(p)$ ($p \geq 1$, целое) класс целых функций $f(z)$ порядка $p \geq 1$ и типа $\leq \sigma$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty \left| f\left(te^{-i\pi\left(\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{p}\right)}\right) \right|^2 t^{2\mu p - p - 1} dt < +\infty \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2p - 1\right).$$

Теорема 8. Класс $A_\sigma(p)$ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} E_p\left\{ze^{i\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{p}\right)}v; \mu\right\} \psi_k(v) v^{\mu p - 1} dv,$$

$$\text{где } \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \text{ и } \int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} |\psi_k(v)|^2 |v|^{p-1} dv < +\infty \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1).$$

Отметим, что из этой теоремы при $p = \mu = 1$ опять следует упомянутый выше результат Палей и Винера.

Сектор математики
Академии наук Арм.ССР и
Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
10 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 1948, гл. III.
² М. М. Джрбашян, Матем. сборн., 33 (75):3 (1953). ³ R. Paley, N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, 1934, p. 12.