

Ю. М. ШЕХТМАН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОГО РАСХОДА ЖИДКОСТИ В ПРОЦЕССЕ КОЛЬМАТАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 14 V 1954)

Рассмотрим вопрос об определении изменения фильтрационного расхода жидкости ($q = q(t)$) в процессе кольматации однородного грунта ($k_0 = \text{const}$) при линейной одномерной фильтрации через этот грунт смеси жидкости со взвешенными твердыми частицами и при постоянном перепаде давления ($p_1 - p_0 = \text{const}$)*.

Под кольматацией подразумевается здесь заполнение пор грунта мелкими глинистыми частицами (движущимися вместе с фильтрующей жидкостью в виде малоконцентрированной суспензии) с целью уменьшения фильтрационной способности этого грунта. Предполагается, что к началу фильтрации смеси поры грунта заполнены водой.

Единичный расход q_0 при линейной вертикальной фильтрации чистой воды выражается, как известно (^{1,2}), зависимостью

$$q_0 = -k_0 \left[\frac{(p_1 - p_0)}{\gamma(x_1 - x_0)} - 1 \right] \text{ или } q_0 = k_0 \left(1 + \frac{p_1 - p_0}{\gamma T} \right); \quad (1)$$

T — глубина кольматируемого грунта; γ — вес единицы объема воды; $p_1 = p_0 + \gamma H$, где H — глубина воды над грунтом, p_0 — атмосферное давление.

Из уравнения (1) видно, что при фильтрации однородной жидкости вертикально вниз, когда действует еще и сила тяжести, единичный расход q_0 всегда больше коэффициента фильтрации k_0 и только при весьма большой глубине T или когда p_1 мало отличается от p_0 значение q_0 делается близким к k_0 . В случае, когда фильтрационный поток встретит слой грунта с коэффициентом фильтрации k_1 большим, чем $k_0 [1 + (p_1 - p_0)/\gamma T]$, произойдет разрыв потока. Жидкость будет поступать в более проницаемый слой в виде отдельных капель или струек, не заполняя всех пор.

В процессе фильтрации суспензии мы имеем следующую картину. Наибольшая кольматация происходит на входе фильтрационного потока в грунт, а с удалением от границы степень кольматации постепенно убывает. Следовательно, в данный момент времени коэффициент фильтрации будет наименьшим на входной части кольматируемого грунта и постепенно будет увеличиваться с глубиной до начального значения k_0 . Так как при этом происходит уменьшение расхода или скорости фильтрации во времени $q = q(t)$, то на некоторой глубине $x = L$ в фиксированный момент времени t_i значение коэффициента фильтрации k станет равным значению q . В разные моменты времени t_i кривые $k = k(x, t_i)$ будут в разных точках пересекаться с линиями $q(t_i)$, параллельными оси x (см. рис. 1).

* Приводимое здесь решение может найти применение при расчете кольматации каналов большой ширины, водоемов, грунтов и др.

Уравнение для определения единичного расхода в процессе фильтрации смеси запишется согласно (1) в виде

$$q(t) = -\frac{k(x, t)}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} + k(x, t), \quad (2)$$

где $k(x, t)$ — коэффициент фильтрации в процессе кольтации. Он является, как известно (^{3,4}), функцией от степени кольтации $\zeta(x, t)$ и выражается зависимостью

$$k = k_0 (1 - \sqrt{\zeta})^3. \quad (3)$$

Из уравнения (2), если принять время t за параметр, имеем

$$dp = \frac{\gamma [k(x, t) - q(t)]}{k(x, t)} dx,$$

откуда

$$\frac{p_1 - p_0}{\gamma} = \int_0^{L(t)} \frac{q(t) - k(x, t)}{k(x, t)} dx. \quad (4)$$

Левая часть уравнения (4) является по условию задачи величиной постоянной. Интеграл же, входящий в правую часть, является функцией своего верхнего предела L и переменного параметра t . Следовательно, для постоянства величины интеграла необходимо, чтобы верхний предел L был функцией переменного t , т. е. $L = L(t)$.

Точки пересечения линий $q(t)$ с кривыми $k = k(x, t)$ на рис. 1 дадут те значения $x = L(t_i)$, которые явятся верхним пределом

интеграла, удовлетворяющим уравнению (4) в момент времени t_i , а давление в этих точках в соответствующие моменты времени будет p_0 .

Таким образом, уравнение (4) показывает, что на некоторой глубине $x = L(t)$, где коэффициент фильтрации $k(x, t)$ станет равным значению $q(t)$, подинтегральная функция $\frac{q(t) - k(x, t)}{k(x, t)}$ станет равной нулю. Следовательно, на этой глубине нарушится сплошность потока, и жидкость благодаря действию силы тяжести будет протекать вниз отдельными каплями или струйками, а давление станет равным p_0 .

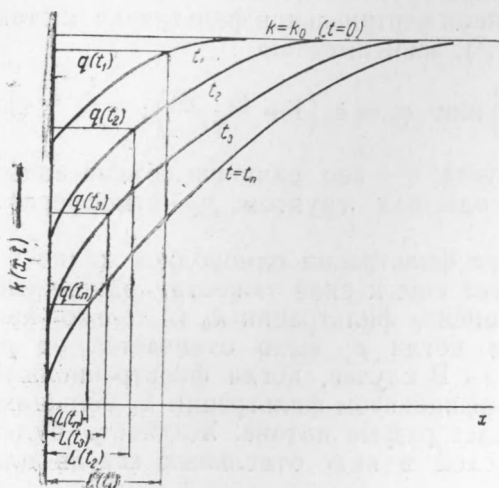


Рис. 1

Поверхность $x = L(t)$, где происходит отрыв потока, должна таким образом удовлетворять двум условиям: 1) коэффициент фильтрации, который мы обозначим через $k[L(t), t]$, должен быть равен единичному расходу $q(t)$ в рассматриваемый момент времени t ;

$$k[L(t), t] = q(t) \quad (5)$$

и 2) давление на этой поверхности в тот же момент времени должно быть равно p_0 . Следует отметить, что значение верхнего предела $L(t)$ может быть определено также, если построить кривые зависимости подинтегральной функции $\left(\frac{q(t)}{k(x, t)} - 1\right)$ от x при различных значениях $q(t)$ (рис. 2). Точки пересечения этих кривых с осью x и дадут, как

легко видеть, искомые значения $x = L(t_i)$. Из сказанного видно, что значение фильтрационного расхода $q(t)$ в процессе кольтмации определяется здесь с учетом перемещающейся поверхности и может быть отнесено к разряду задач с неизвестными подвижными границами, на которых поставлены определенные краевые условия.

Применим здесь для решения задачи способ, основанный на методе последовательной смены стационарных состояний и на методе итераций (повторяющийся процесс нахождения последовательных приближений искомой величины). Метод последовательной смены стационарных состояний заключается в данном случае в том, что время кольтмации разбивается на малые промежутки, в каждом из которых расход $q(t)$ принимается постоянным. На первой стадии приближения он принимается равным значению в начале промежутка, а на последующих стадиях — его искомому значению в конце промежутка, которое постепенно уточняется по методу итераций.

В работе (3) для случая фильтрации суспензии с постоянным расходом значение $\zeta(x, t)$ получается в результате решения системы уравнений

$$q_0 \frac{\partial \delta}{\partial x} = f_0 (1 - \varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (6)$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = A \delta (1 - \zeta) \quad (7)$$

(при начальном и граничном условиях $\zeta(x, 0) = 0$ и $\delta(0, t) = \delta_0$) в виде

$$\zeta(x, t) = \frac{e^{A \delta_0 t} - 1}{e^{A \delta_0 t} + e^{A B_0 x} - 1}, \quad B_0 = \frac{f_0 (1 - \varepsilon)}{q_0}. \quad (8)$$

Здесь A — опытный параметр; f_0 — начальная пористость грунта; ε — пористость осевшей массы; δ — объемная концентрация смеси.

Значение $\zeta(x, t)$ может быть определено согласно (8) только в некотором промежутке времени $0 \leq t \leq t_i$. Для последующих промежутков времени $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ($i = 2, 3, 4, \dots$) уравнение для определения $\zeta(x, t)$ получится из решения той же системы (6) и (7) в предположении $q(t) = q(t_{i-1})$ при прежнем граничном условии и при начальном условии $\zeta = \zeta(x, t_{i-1})$ при $t = t_{i-1}$ ($t_{i-1} \leq t \leq t_i$) в виде

$$\zeta(x, t) = \frac{\exp[A \delta_0 (t - t_{i-1})] + \zeta(x, t_{i-1}) \exp[F(x, t)] - 1}{\exp[A \delta_0 (t - t_{i-1})] + \exp[F(x, t)] - 1}, \quad (9)$$

где $F(x, t) = AB(t) \left[x - \int_0^x \zeta(x, t_{i-1}) dx \right]$ и $B(t) = \frac{f_0 (1 - \varepsilon)}{q(t)}$.

Как нетрудно видеть, уравнение (8) является частным случаем уравнения (9), когда $t_{i-1} = 0$. В результате, задача о нахождении $q(t)$ сводится к решению системы (3), (4), (5) и (9) (неизвестными здесь являются функции $q(t)$; $L(t)$; $k(x, t)$ и $\zeta(x, t)$) путем подбора одной из двух искомых функций $L(t)$ или $q(t)$.

Пусть нам известны значения искомых функций при $t = t_{i-1}$ и мы хотим определить их значения при $t = t_i$. Тогда из (9), полагая $t = t_i$,

вычисляем $\zeta(x, t_i)$, считая $q(t_i)$ равным $q(t_{i-1})$. Это значение $q(t_i)$ принимаем за его нулевое приближение и обозначаем через $q_0(t_i)$.

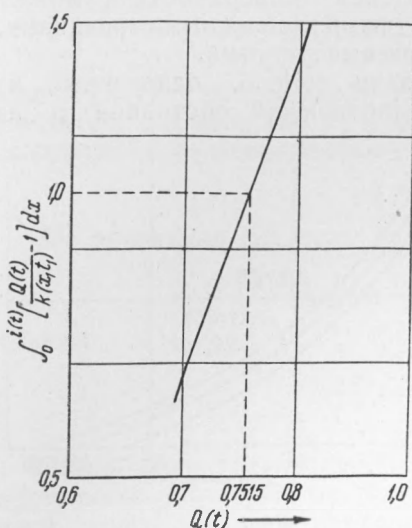


Рис. 3

Затем из (3) определяем $k(x, t_i)$. Далее графическим способом, приведенным выше (см. рис. 1 и 2)*, определяем значения функции $L(t)$, удовлетворяющие уравнению (5). По найденным значениям $L(t)$ при соответствующих им $q(t)$ вычисляем значения интеграла (4) и строим график его зависимости от $q(t)$, как показано на рис. 3. Проводим на высоте $(p_1 - p_0) / \gamma$ прямую, параллельную оси абсцисс $q(t)$, до пересечения с построенной кривой. Абсцисса этой точки пересечения даст значение $q(t_i)$, которое мы принимаем за первое приближение искомой величины и обозначаем через $q_1(t_i)$. Затем производим вычисления функций $\zeta(x, t)$ и $k(x, t)$, принимая в формуле (9) $q(t) = q_1(t_i)$, и т. д.

По достижении совпадения двух последовательных приближений $q_n(t_i)$

и $q_{n+1}(t_i)$ в пределах требуемой точности принимаем их за искомое значение функции $q(t_i)$ в точке $t = t_i$. При отыскании значения $q(t)$ в последующей точке $t = t_{i+1}$ функция $\zeta(x, t_{i-1})$, входящая в уравнение (9), должна быть заменена на функцию $\zeta(x, t_i)$ в соответствии с новым начальным условием: $\zeta = \zeta(x, t_i)$ при $t = t_i$ и т. д.

Величина $q(t)$ может быть также найдена, как было указано выше, если задаваться значениями $L(t)$.

Для сравнения вычисленных по предложенному здесь методу значений расхода с опытными были взяты данные у Е. М. Сергеева** : $\delta_0 = 1 \cdot 10^{-3}$; $f_0 = 0,4$; $\varepsilon = 0,5$; $q_0 = 27$ см/час; опытный параметр A получен равным 81 ***. На рис. 4 приводятся кривые $Q = Q(t)$, полученная из опыта (сплошная) и вычисленная (пунктирная).

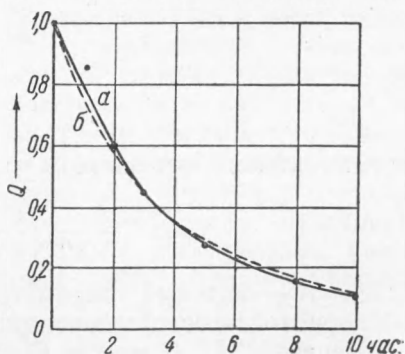


Рис. 4. Кривые зависимости $Q(t)$. а — опытная, б — вычисленная

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
25 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Ведерников, Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа, 1939. ² Н. Н. Павловский, Изв. НИИГ, 19 (1936). ³ Ю. М. Шехтман, Инж. сборн. Инст. механики АН СССР, 14 (1953). ⁴ Ю. М. Шехтман, Изв. АН СССР, ОТН, № 2 (1953).

* На рис. 2, 3 и 4 нанесены безразмерные значения $Q(t) = q(t)/q_0$ и $K(x, t) = k(x, t)/k_0$, полученные в примере (см. ниже).

** Эти данные были нами использованы с любезного разрешения Е. М. Сергеева.

*** Метод определения параметра A дается в работе (³).