

Е. П. ПОПОВ

АВТОКОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩЕМСЯ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 8 VI 1954)

В автоколебательных системах автоматического регулирования и следящих системах, в автоколебательных измерительных и счетно-решающих устройствах приходится иметь дело с подаваемой извне величиной $f(t)$, которая меняется достаточно медленно по сравнению с периодом автоколебаний. Известно, что частота и амплитуда автоколебаний системы могут существенно меняться с изменением величины внешнего воздействия $f(t)$ (при неизменных параметрах системы). Для таких систем практически важно определять автоколебания с учетом этого воздействия. Покажем здесь распространение приближенного способа, основанного на трудах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова ⁽¹⁾ и изложенного в заметке ⁽⁴⁾, на этот случай. Учету постоянной составляющей и медленно протекающих процессов в нелинейных колебательных системах посвящены также работы А. И. Чекмарева ⁽²⁾ и Ю. А. Митропольского ⁽³⁾.

Пусть дифференциальное уравнение нелинейной системы (любого порядка) имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (1)$$

где $Q(p)$, $R(p)$, $S(p)$ — операторные многочлены; $F(x, px)$ — нелинейная функция; $f(t)$ — внешнее воздействие на систему.

Будем считать, что сама $f(t)$ и все ее производные, входящие в (1), изменяются во времени настолько медленно, что при определении автоколебаний в произвольный момент времени t можно считать величину правой части $S(p)f(t)$ постоянной за период автоколебаний. Если $f(t)$ имеет колебательный характер, то частота ее изменения предполагается во много раз меньшей, чем частота автоколебаний данной системы, чтобы выполнялось вышеуказанное требование. Эти положения обычно оказываются практически оправданными в перечисленных в начале системах.

В первом приближении будем искать решение в виде

$$x = x^0 + x^n, \quad x^n = a \sin u, \quad \omega = \frac{du}{dt}. \quad (2)$$

Здесь имеем три неизвестные: «постоянная составляющая» x^0 (медленно меняющаяся с течением времени при изменении f), амплитуда a и частота ω периодической части решения x^n (автоколебания, наложенные на медленно меняющуюся составляющую x^0). Величины a и ω также будут медленно меняться с изменением $f(t)$.

Произведем гармоническую линеаризацию нелинейной функции F , причем, в отличие от ⁽⁴⁾, здесь необходимо учитывать «постоянную составляющую», т. е. имеем

$$F = q^0(a, \omega, x^0) + \left[q(a, \omega, x^0) + \frac{q_1(a, \omega, x^0)}{\omega} p \right] x^n, \quad (3)$$

где

$$q^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F du, \quad q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \sin u du, \quad q_1 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F \cos u du, \quad (4)$$

причем F обозначает заданную функцию $F(x, px)$ с подстановкой $x = x^0 + a \sin u$, $px = a\omega \cos u$.

После гармонической линейризации уравнение (1), следовательно, получает вид

$$Q(p)(x^0 + x^n) + R(p)\left[q^0 + \left(q + \frac{q_1}{\omega} p\right)x^n\right] = S(p)f(t)$$

и, вследствие предположенного ранее медленного изменения величины $S(p)f(t)$, распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} [Q(p) + R(p)\left(q + \frac{q_1}{\omega} p\right)]x^n &= 0, \\ Q(p)x^0 + R(p)q^0 &= S(p)f(t). \end{aligned}$$

Первое из них относится к уравнениям такого типа, которые решаются в (4). В результате получаем три уравнения:

$$\begin{aligned} X(a, \omega, x^0) &= 0, \\ Y(a, \omega, x^0) &= 0, \\ Q(p)x^0 + R(p)q^0 &= S(p)f(t) \end{aligned} \quad (5)$$

с тремя неизвестными: a, ω, x^0 .

Этим и решается задача об определении одночастотных периодических решений (автоколебаний), наложенных на «постоянную составляющую» x^0 , в зависимости от параметров системы и от заданного внешнего воздействия $f(t)$; определяются также области существования и отсутствия автоколебаний по параметрам системы и по величине f . Вместе с тем определяется и качество автоколебательной системы в смысле выполнения желаемого соотношения между переменной x^0 и заданным внешним воздействием $f(t)$ в установившемся режиме.

Величины a, ω, x^0 отыскиваются здесь как функции времени при заданном $f(t)$. Во многих же случаях достаточно бывает найти автоколебания системы при различных постоянных значениях f^0 внешнего воздействия. Тогда уравнения (5) заменяются следующими:

$$\begin{aligned} X(a, \omega, x^0) &= 0, \\ Y(a, \omega, x^0) &= 0, \\ Q(0)x^0 + R(0)q^0 &= S(0)f^0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $Q(0), R(0), S(0)$ — свободные члены соответствующих операторных многочленов. В этом случае искомые величины a, ω, x^0 являются постоянными и решение значительно облегчается. Кроме определения автоколебаний, зависящих от f^0 , здесь выявляются также и статические отклонения x^0 . Получаемая при этом зависимость a и ω от величины f^0 часто может быть использована для оценки характера изменения амплитуды и частоты автоколебаний при заданном достаточно медленном изменении $f(t)$.

Заметим, что поскольку в данном решении отпадает прежнее (4) условие $\int_0^{2\pi} F du = 0$, то характер нелинейности здесь не ограничивается определенным видом симметрией. Поэтому решение в виде (6) при

$f^0 = 0$ рекомендуется для приближенного определения автоколебаний систем с несимметричными нелинейностями также и при отсутствии внешнего воздействия.

Описанный здесь на примере уравнения (1) способ решения задачи применим и для других видов нелинейных систем первого класса (см. ⁽⁴⁾) при одной и при нескольких нелинейностях от одной переменной (и ее производных). В задачах второго и третьего классов, где под знаками нелинейных функций стоят две или более переменных, подход к решению задачи остается прежним, но наряду с привлечением дополнительных амплитудных и фазовых соотношений, указанных в ⁽⁴⁾, понадобится привлечение дополнительных соотношений между постоянными составляющими, написание которых не представляет труда.

Практическое применение описанного здесь первого приближения ограничено не только достаточно медленным изменением внешнего воздействия, но еще и возможностью определять первые гармоники нелинейных функций по первой гармонике аргумента. В противном случае здесь также можно провести уточнение первого приближения подобно тому, как это было сделано в заметке ⁽⁵⁾. Если же внешнее воздействие является периодическим и имеет частоту, сравнимую с частотой автоколебаний или превышающую ее, то, согласно ⁽⁴⁾, можно определить одночастотные вынужденные колебания системы при условии захватывания.

Поступило
9 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937. ² А. И. Чекмарев, Инж. сборн., 4, в. 2 (1948). ³ Ю. А. Митропольский, Прикладн. матем. и мех., в. 2 (1950). ⁴ Е. П. Попов, ДАН, 95, № 5 (1954). ⁵ Е. П. Попов, ДАН, 98, № 1 (1954).