

В. И. ШЕСТАКОВ

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МОНОЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ВОЗВРАТНУЮ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 VII 1954)

1°. Пусть имеем последовательность

$$\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(i), \dots \quad (1)$$

n -разрядных двоичных чисел, т. е. чисел вида

$$\xi(i) = \sum_{k=1}^n \xi_k(i) \cdot 2^{n_0-k}, \quad (2)$$

где n_0 — некоторое фиксированное целое число, n — натуральное число.

Будем говорить, что последовательность

$$\eta(0), \eta(1), \dots, \eta(i), \dots \quad (3)$$

N -разрядных двоичных чисел, где $N \geq n$, содержит последовательность (1), если двоичные цифры каждого члена $\xi(i)$ последовательности (1) совпадают с соответствующими цифрами соответствующего члена $\eta(i)$ последовательности (3), т. е. если

$$\eta(i) = \sum_{k=1}^n \xi_k(i) \cdot 2^{n_0-k} + \sum_{k=n+1}^N \eta_k \cdot 2^{n_0-k}. \quad (4)$$

Переход от последовательности (1) к любой содержащей ее последовательности (3) будем называть расширением или уточнением последовательности (1), а обратный переход от последовательности (2) к любой содержащейся в ней последовательности (1) будем называть сужением или огрублением последовательности (3).

2°. Всякую последовательность вида

$$\xi(0), \dots, \xi(i), \dots, \xi(i_0 - 1) \quad (\xi(i_0), \dots, \xi(i_0 + m - 1)), \quad (5)$$

где последовательность, заключенная в скобки, является периодической последовательностью с периодом m , будем называть моноциклической последовательностью (1).

Моноциклическую последовательность

$$\eta(0), \dots, \eta(i), \dots, \eta(i_0 - 1) \quad (\eta(i_0), \dots, \eta(i_0 + m - 1)). \quad (6)$$

все первые $i_0 + m$ членов которой различны, будем называть основной последовательностью.

Всякую моноциклическую последовательность можно расширить до основной последовательности (6) и, очевидно, это можно сделать различными способами. В частности, это можно сделать таким

образом. Выбираем минимальное число N , удовлетворяющее неравенству $2^{N-n} \geq M$, где M — максимальное число равных друг другу членов среди первых $i_0 + m$ членов последовательности (5). Затем заменяем каждый член $\xi(i)$ последовательности (5) N -разрядным двоичным числом $\eta(i)$ вида (4), у которого цифры последних (младших) $N - n$ разрядов выбраны так, чтобы образованное из этих цифр целое число $\eta_N(i)\eta_{N-1}(i)\dots\eta_{n+1}(i)$ являлось бы двоичным эквивалентом числа предшествующих членов последовательности (5), равных данному члену $\xi(i)$ той же последовательности. Полученная таким образом последовательность $\{\eta(i)\}$ уже не будет содержать одинаковых членов среди ее первых $i_0 + m$ членов и будет, следовательно, основной последовательностью.

3°. Последовательность, каждый член которой является однозначной функцией некоторого числа предшествующих членов этой же последовательности, называется *возвратной последовательностью*. В частности, возвратной последовательностью является и последовательность, описываемая уравнениями:

$$\eta(0) = \eta_0, \quad \eta(i+1) = \varphi(\eta(i)), \quad (7)$$

где φ — некоторая однозначная функция, η_0 — некоторое заданное число, i — любое натуральное число.

Из однозначности функции $\varphi(\eta)$ и того, что число различных возможных членов последовательности $\eta(i)$ равно 2^n , следует, что *всякая возвратная последовательность вида (7) является основной моноциклической последовательностью с периодом $m \leq 2^n$* .

Справедливо и обратное утверждение: *всякая основная моноциклическая последовательность (5) является возвратной последовательностью, описываемой уравнениями (7)*.

Функцию $\varphi(\eta)$ можно эффективно построить по любой заданной основной моноциклической последовательности (5) посредством метода, описанного в следующем разделе.

4°. Условимся рассматривать цифры n -значного двоичного числа $\eta(i)$ как компоненты n -мерного вектора

$$\mathbf{y}(i) = [y_1(i), \dots, y_k(i), \dots, y_n(i)], \quad (8)$$

т. е. положим

$$y_k(i) = \eta_k(i) \quad (9)$$

для каждого k и i

$$(k = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, 2, \dots).$$

Произведя такую замену для каждого члена заданной последовательности, мы получим соответствующую основную моноциклическую последовательность значений n -мерного вектора $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(i), \dots, \mathbf{y}(i_0 - 1) \quad (\mathbf{y}(i_0), \dots, \mathbf{y}(i_0 + m - 1)). \quad (10)$$

Эта последовательность, как и однозначно-соответствующая ей последовательность (6), является возвратной последовательностью, т. е. имеют место равенства

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(i+1) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(i)) \quad (11)$$

для всякого натурального числа i .

Так как компоненты вектора $\mathbf{y}$ могут принимать только два значения: 0 и 1, то существует 2^n различных значений $\mathbf{y}_j$ этого вектора. Каждому значению $\mathbf{y}_j$ вектора $\mathbf{y}$ взаимно-однозначно соответствует функция

$$p_j(\mathbf{y}) = \prod_{k=1}^n (y_{j,k} \oplus y_k \oplus 1), \quad (12)$$

где y_k и $y_{j,k}$ — k -е компоненты переменного вектора y и его значения y_j , соответственно, а знак $\oplus$ означает операцию сложения элементов простого поля с характеристикой 2, т. е. операцию, определяемую равенствами

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

Функции $p_j(y)$ в двухэлементной булевой алгебре называются конституентами единицы.

В силу взаимно-однозначного соответствия между значениями y_j вектора y и функциями $p_j(y)$ последовательность (10) эквивалентна следующей последовательности конституентов единицы:

$$p_{j_0}(y), \dots, p_{j_i}(y), \dots, p_{j_{i_0-1}}(y) \quad (p_{j_{i_0}}(y), \dots, p_{j_{i_0+m-1}}(y)). \quad (13)$$

Всякий вектор y из n -мерного векторного пространства над простым полем с характеристикой 2 будем называть n -мерным двоичным вектором, а двоичный вектор, являющийся функцией некоторой величины, двоичной функцией этой величины.

Всякую двоичную функцию $f(y)$ двоичного вектора y можно разложить по функциям $p_j(y)$, т. е. однозначно представить в виде

$$f(y) = \sum_{j=0}^{2^n-1} f(y_j) p_j(y), \quad (14)$$

где $\sum_{j=0}^{2^n-1}$ — знак суммирования 2^n векторов простого поля характеристики 2. Заметим, что в силу равенства

$$p_j(y) p_{j'}(y) = 0, \quad (15)$$

имеющего место при $j' \neq j$, и того, что при $a \cdot b = 0$,

$$a \oplus b = a \vee b, \quad (16)$$

где $\vee$ — знак булева сложения, знак Σ в формуле (14) можно рассматривать также и как знак булевой суммы. При такой трактовке знака Σ формулу (14) можно рассматривать как векторную форму известного разложения любой функции булевой алгебры по конституентам единицы.

Применяя формулу (14) к значениям вектора y , встречающимся в заданной основной моноциклической последовательности (10), получаем, на основании равенства (11), формулу

$$f(y) = \sum_{i=0}^{2^n-1} y(i+1) p_{j_i}(y), \quad (17)$$

позволяющую найти искомую функцию $f(y)$ возвратной последовательности, эквивалентной заданной основной последовательности (10) или равносильной последней основной моноциклической последовательности (6).

В случае, если заданная моноциклическая последовательность (5) не является основной, ее необходимо предварительно расширить каким-либо методом (например, методом, указанным в 2°) до основной последовательности.

Компоненты f_k векторной функции f , вычисленной по формуле (17), можно рассматривать как соответствующие двоичные цифры φ_k функции φ в уравнениях (7).

Описанный метод позволяет, таким образом, преобразовать всякую моноциклическую последовательность чисел, представимых конечным числом двоичных цифр, в возвратную последовательность, удовлетворяющую уравнениям (7). В частности, всякая эмпирически полученная последовательность чисел, т. е. *любая эмпирическая функция одного переменного может быть преобразована этим методом в возвратную последовательность, описываемую уравнением (7)*.

5°. Ценность описанного метода преобразования определяется тем, что получаемая этим методом функция выражается через двоичные цифры членов заданной последовательности посредством операций булевой алгебры. Это дает возможность каждую получаемую этим методом функцию φ реализовать посредством некоторой автономной релейной системы, построенной из двухпозиционных реле (автономной системой мы называем такую релейную систему, которая не содержит реле, управляемых извне).

Иначе говоря, изложенный метод дает возможность синтезировать автономные релейные системы по любым заданным последовательностям их состояний:

$$y_{j_0}, y_{j_1}, \dots, y_{j_i}, \dots, y_{j_{i_0-1}} \quad (y_{j_{i_0}}, \dots, y_{j_{i_0+m-1}}), \quad (18)$$

где y_{j_i} — значение простейшего n -мерного вектора $y(i)$, описывающего состояние всех n реле данной релейной системы на i -м такте ее работы.

В случае, когда начальное состояние $y(0)$ релейной системы, построенной при помощи описанного выше метода, совпадает с одним из членов заданной последовательности (18), процесс изменения состояния этой системы будет совпадать с той подпоследовательностью последовательности (18), которая начинается с члена, совпадающего с $y(0)$. В случае же, если $y(0)$ не совпадает ни с одним из членов последовательности (18), эта релейная система сразу перейдет в нулевое состояние $y_0 = 0$, которое будет устойчивым состоянием искомой системы.

Когда релейная система осуществляется посредством некоторой релейно-контактной схемы, в качестве вектора, характеризующего состояние этой системы, можно взять вектор $y = [y_1, \dots, y_k, \dots, y_n]$, компонентами $y_1, \dots, y_k, \dots, y_n$ которого являются значения проводимостей либо замыкающих, либо размыкающих контактов всех реле, образующих данную релейную систему.

6°. Изложенный выше метод можно использовать для определения функции φ в уравнениях (7) в тех случаях, когда значения функции $\eta(i)$, определяемой этими уравнениями, неограниченно возрастают, как это имеет место, например, в случаях, когда значения $\eta(i)$ образуют возрастающую арифметическую или геометрическую прогрессию. Результаты, полученные для значений $\eta(i)$, представимых конечным числом n двоичных цифр, можно посредством перехода к пределу распространить и на случай $n \rightarrow \infty$.

Этим методом можно, например, построить примитивно-рекурсивную функцию $\beta(i)$, определяемую уравнениями ⁽²⁾ $\beta(0)$, $\beta(i+1) = \beta(i) + 1$, т. е. функцию, последовательность значений которой образует натуральный ряд.

Поступило
7 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, М.—Л., 1949. ² Р. Петер, Рекурсивные функции, ИЛ, 1954.