

П. К. РАШЕВСКИЙ

ВНУТРЕННЕ-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VI 1954)

1°. Матричная (линейная) группа Ли называется алгебраической, если ее матрицы можно полностью охарактеризовать системой алгебраических уравнений, связывающих элементы этих матриц (мы все время будем находиться в комплексной области).

Известны (1, 2) следующие свойства алгебраических групп: объединение и пересечение алгебраических групп есть группа алгебраическая; коммутант всякой матричной группы Ли есть группа алгебраическая (в частности, отсюда следует, что полупростая матричная группа Ли — всегда алгебраическая*); параметры алгебраической группы можно подобрать таким образом, что элементы ее матриц будут рационально зависеть от параметров; базис матричной алгебры Ли для алгебраической группы всегда можно составить из матриц или нильпотентных, или приводимых к диагональному виду с целочисленными элементами по главной диагонали.

Нетрудно показать также, что для алгебраичности матричной группы Ли необходима и достаточна алгебраичность ее радикала.

В этой заметке мы хотим рассмотреть те группы Ли, которые способны иметь алгебраические матричные представления.

2°. Пусть G — группа Ли, R — ее радикал, J — нильпотентный идеал радикала, S — полупростая компонента. В алгебре Ли выбираем базис из векторов $b_\alpha, a_\alpha, s_\omega$ так, что векторы b_α образуют базис J ; векторы a_α — базис какой-либо плоскости дополнительной к J в R ; наконец, векторы s_ω — базис S . В дальнейшем под $b_\alpha, a_\alpha, s_\omega$ подразумеваем базис, выбранный именно таким образом.

Теорема 1. Если группа Ли G допускает алгебраическое матричное представление, то базис $b_\alpha, a_\alpha, s_\omega$ в ее алгебре Ли может быть выбран так, что имеют место соотношения

$$[a_\alpha a_\mu] = 0, \quad [a_\alpha s_\omega] = 0, \quad [a_\alpha b_\lambda] = c_{\alpha\lambda} b_\alpha, \quad (1)$$

где $c_{\alpha\lambda}$ — целые числа.

Будем называть группу Ли внутренне-алгебраической, если ее присоединенная группа есть группа алгебраическая.

Теорема 2. Для того чтобы группа Ли была внутренне-алгебраической, необходимо и достаточно, чтобы в ее алгебре Ли существовал базис $b_\alpha, a_\alpha, s_\omega$ со свойствами (1).

Таким образом, для существования алгебраического матричного представления необходимо, чтобы данная группа Ли удовлетворяла условиям (1), или, что то же самое, была внутренне-алгебраической. Оказывается, что эти же условия и достаточны. Рассмотрим какое-

* Более того, неприводимая полупростая матричная группа Ли совпадает со связанной унимодулярной группой инвариантности некоторого тензора вида a_{kl}^{ij} .

нибудь матричное представление внутренне-алгебраической группы G . Если оно разложимо, т. е. в пространстве представления существуют взаимно-дополнительные инвариантные плоскости, то представление достаточно рассматривать на этих плоскостях, и оно сводится к неразложимым представлениям. Через B_α , A_α , S_ω обозначаем матрицы, которые в матричном представлении алгебры Ли отвечают векторам b_α , a_α , s_ω .

Теорема 3. Всякое неразложимое унимодулярное матричное представление внутренне-алгебраической группы Ли может быть приведено к ее алгебраическому представлению путем добавления к матрицам A_α подходящих нильпотентных матриц, перестановочных между собой и со всем представлением (матрицы B_α и S_ω при этом остаются без изменения).

Таким образом, все матричные представления внутренне-алгебраических групп связаны с их алгебраическими матричными представлениями достаточно тривиальным путем.

Заметим, что к числу внутренне-алгебраических групп принадлежат все группы Ли с нильпотентным радикалом ($J = R$), а также дифференциальные группы.

Внутренне-алгебраические группы являются специальным частным случаем расщепляемых групп, рассмотренных в ⁽³⁾. В связи с этим наша теорема 2 представляет собой некоторую специализацию результатов, полученных в ⁽³⁾.

Поступило
25 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Maurer, Münch. Ber., 24 (1894). ² C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, 2, 1951. ³ А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 9, 329 (1945).