

Ю. В. ПРОХОРОВ

# О ЛОКАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 VI 1954)

1. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (1)$$

последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает лишь целые значения;  $s_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ;  $A_n = Ms_n$ ;  $B_n^2 = Ds_n$ ;  $P_n(m) = \text{Pr} \{s_n = m\}$ . Условимся говорить, что последовательность (1) удовлетворяет локальной предельной теореме (л. т.), если при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $m$ ,  $-\infty < m < +\infty$ ,

$$P_n(m) = (2\pi)^{-(1/2)} B_n^{-1} \exp \{-(m - A_n)^2 / 2B_n^2\} + o(B_n^{-1}). \quad (2)$$

Условия, при выполнении которых последовательность (1) удовлетворяет л. т., исследовались ранее Р. Мизесом <sup>(1, 2)</sup>, Г. М. Бавли <sup>(3)</sup>, Б. В. Гнеденко <sup>(4)</sup> и др.

В настоящей заметке дается необходимое и достаточное условие применимости л. т. к последовательности случайных величин  $\xi_n$ , удовлетворяющих условию (A):  $|\xi_n| \leq K$ , где  $K$  — некоторая постоянная.

Примечание. В случае различно распределенных слагаемых выполнение (или невыполнение) соотношения (2) может существенным образом зависеть от характера распределений первых членов последовательности (1). Пусть, например,  $\xi_1 = 0$  с вероятностью  $q$  и равно 1 с вероятностью  $p$ , и пусть при  $n \geq 2$   $\xi_n = -1$  с вероятностью  $1/2$  и 1 с вероятностью  $1/2$ . Нетрудно показать, что так определенная последовательность  $\{\xi_n\}$  удовлетворяет л. т. в том и только том случае, когда  $p = q = 1/2$ .

Поэтому естественно ввести следующее определение: последовательность (1) удовлетворяет локальной теореме в усиленной форме (л. т. у.), если соотношение (2) выполняется как для последовательности (1), так и для любой последовательности, полученной из (1) изменением конечного числа начальных членов (с сохранением, разумеется, требования целочисленности).

2. Пусть  $p_{nj} = \text{Pr} \{\xi_n = j\}$ . Не ограничивая общности, можно предположить, что при всех  $n$  (B):  $p_{n0} \geq p_{nj}$ . Предположим далее (C):  $B_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема.** Пусть последовательность (1) подчинена условиям (A), (B) и (C).

Тогда для того, чтобы эта последовательность удовлетворяла л. т. у., необходимо и достаточно условие: общий наибольший делитель всех целых  $j$ , для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{nj} = \infty,$$

равен единице.

Доказательство необходимости.

Лемма 1. Для применимости к последовательности (1) л. т. (а, тем более, л. т. у.) необходимо, чтобы при любом целом  $h > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{s_n \equiv j, \text{ mod } h\} = h^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, h-1.$$

Утверждение леммы 1 очевидным образом выводится из формулы (2).

Лемма 2. Для применимости к последовательности (1) л. т. у. необходимо, чтобы для любой подрешетки  $L$  решетки целых чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr \{\xi_n \bar{\in} L\} = \infty.$$

Доказательство леммы 2 мы опускаем.

Обозначим через  $J$  совокупность тех  $j$ , для которых  $\sum_1^{\infty} p_{nj} = \infty$ . Нетрудно показать, что если л. т. у. имеет место, то  $J$  содержит по крайней мере два различных числа. Допустим, что общий наибольший делитель чисел  $j \in J$  равен  $h > 1$ . Обозначим через  $L$  минимальную решетку, натянутую на  $J$ ; ее шаг равен  $h$ . Мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr \{\xi_n \bar{\in} L\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr \{\xi_n \bar{\in} J\} < \infty,$$

что, в силу леммы 2, противоречит предположению о том, что последовательность (1) удовлетворяет л. т. у. Необходимость условий теоремы доказана.

Доказательство достаточности. Положим  $\zeta_n = (s_n - A_n) | B_n$ ,  $z_m = (m - A_n) | B_n$ . Через  $f(t; \xi)$  условимся обозначать характеристическую функцию случайной величины  $\xi$ .

Положим далее (ср. (4), § 49)

$$R_n = 2\pi \left( B_n P_n(m) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z_m^2} \right) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (3)$$

где

$$I_1 = \int_{|t| \leq \theta} e^{-iz_m t} (f(t; \zeta_n) - e^{-(t^2/2)}) dt, \quad I_2 = \int_{\theta < |t| \leq B_n/4k} e^{-iz_m t} f(t; \zeta_n) dt,$$

$$I_3 = \int_{B_n/4k < |t| \leq \pi B_n} e^{-iz_m t} f(t; \zeta_n) dt, \quad I_4 = - \int_{|t| > \theta} e^{-iz_m t - (t^2/2)} dt.$$

Лемма 3. При  $|t| \leq B_n/4k$   $|f(t, \zeta_n)| \leq \exp \{-t^2/3\}$ .

Эта лемма представляет собою следствие леммы 3 гл. VII книги (5).

В силу (A) и (C) последовательность (1) удовлетворяет интегральной предельной теореме; следовательно, при любом  $\theta$   $\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0$ .

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_m |R_n| \right\} \leq 2 \int_{\theta}^{\infty} (e^{-(t^2/3)} + e^{-(t^2/2)}) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_m |I_3| \right\},$$

и, в силу произвольности  $\theta$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_m |R_n| \right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_m |I_3| \right\}. \quad (4)$$

Оценим теперь  $\sup_m |I_3|$ :

$$\sup_m |I_3| \leq \int_{B_n/4K < |f| \leq \pi B_n} |f(t; \zeta_n) dt = \hat{I}_3, \quad (5)$$

где  $\hat{I}_3 = 2B_n \int_{1/4K}^{\pi} \varphi_n(z) dz$  и  $\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^n |f(z; \xi_k)|$ .

Далее,  $|f(z; \xi_k)|^2 \leq \exp \{|f(z; \xi_k)|^2 - 1\}$  и

$$\varphi_n(z) \leq \exp \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n (|f(z; \xi_k)|^2 - 1) \right\}.$$

Но  $|f(z; \xi_k)|^2 = \sum_j \tilde{p}_{kj} e^{izj} = \sum_j \tilde{p}_{kj} \cos zj$ , где  $\tilde{p}_{kj} = \sum_s p_{k,j+s} \cdot p_{k,s}$ .

Заметим, что при всех  $j$   $\tilde{p}_{kj} \geq p_{kj} \cdot p_{k0} \geq (2K+1)^{-1} p_{kj}$ . Обозначим лежащие на отрезке  $[1/4K, \pi]$  точки вида  $2\pi rj^{-1}$  ( $r$  и  $j$  взаимно просты,  $1 \leq r \leq [j/2]$ ,  $2 \leq j \leq 2K$ ), взятые в порядке возрастания абсциссы, через  $z_1, \dots, z_\nu$ . Минимальное расстояние между соседними точками  $z_p$ , очевидно, не меньше величины  $\pi/(2k)^2$ . Как нетрудно видеть,  $z_1 > 1/4K$  и  $z_\nu = \pi$ . Положим, далее,  $\Delta_1 = [1/4K, (z_1 + z_2)/2]$ ,  $\Delta_m = [(z_{m-1} + z_m)/2, (z_m + z_{m+1})/2]$  при  $2 \leq m \leq \nu - 1$ ,  $\Delta_\nu = [(z_{\nu-1} + z_\nu)/2, z_\nu]$ . Представим интеграл  $\hat{I}_3$  в виде суммы интегралов, взятых по  $\Delta_m$ , и оценим  $B_n \int_{\Delta_m} \varphi_n(z) dz$ . На интервале  $\Delta_m$  лежит одна и только одна из точек  $z_p$ , а именно  $z_m$ . Пусть  $z_m = 2\pi r_0/j_0$ , где  $r_0$  и  $j_0$  взаимно просты и  $j_0 \geq 2$ . Мы имеем

$$|f(z, \xi_k)|^2 - 1 = \sum' \tilde{p}_{kj} (\cos zj - 1) + \sum'' \tilde{p}_{kj} (\cos zj - 1),$$

где  $\Sigma'$  обозначает сумму по  $j \not\equiv 0, \text{mod } j_0$ , а  $\Sigma''$  — сумму по  $j \equiv 0, \text{mod } j_0$ ,  $j \neq 0$ . Условимся через  $\delta_1, \delta_2$  и т. д. обозначать постоянные, зависящие только от  $K$ . Из самого способа построения интервалов  $\Delta_m$  следует, что при  $z \in \Delta_m$  и  $p \neq m$  величина  $|z - z_p|$  не может быть меньше половины наименьшего из расстояний между соседними точками  $z_p$ , т. е.  $|z - z_p| > \delta_1$ . Отсюда вытекает, что при  $z \in \Delta_m$ ,  $j \not\equiv 0, \text{mod } j_0$  ( $2 \leq j < 2K$ ) и любом целом  $w$   $|jz - 2w\pi| \geq 2|z - 2\pi(w/j)| > \delta_2$ , и, следовательно,  $\cos jz - 1 < -\delta_3$ . Далее, при  $z \in \Delta_m$  и  $j \equiv 0, \text{mod } j_0$  ( $2 \leq j < 2K$ )  $\cos jz - 1 < -\delta_4(z - z_m)^2$ .

Таким образом, мы получаем при  $z \in \Delta_m$

$$|f(z, \xi_k)|^2 - 1 \leq -\delta_3 \sum' \tilde{p}_{kj} - \delta_4 (z - z_m)^2 \sum'' \tilde{p}_{kj}$$

и

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|f(z, \xi_k)|^2 - 1) \leq -\alpha_n - \beta_n (z - z_m)^2,$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \delta_3 \sum' \sum_{k=1}^n \tilde{p}_{kj}, \quad \beta_n = \frac{1}{2} \delta_4 \sum'' \sum_{k=1}^n \tilde{p}_{kj}.$$

Как нетрудно видеть,

$$2B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sum_j j^2 \tilde{p}_{kj} \leq (2K)^2 \sum_{j \neq 0} \sum_{k=1}^n \tilde{p}_{kj} = O(\alpha_n + \beta_n).$$

Далее, из условий теоремы следует, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \geq \frac{s_3}{2(2K+1)} \sum' \sum_{k=1}^n p_{kj} \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим отдельно те  $n$ , для которых (а)  $\alpha_n \geq \beta_n$ , и те, для которых (б)  $\alpha_n < \beta_n$ .

В случае (а)

$$\begin{aligned} B_n \int_{\Delta_m} \varphi_n(z) dz &\leq e^{-\alpha_n} B_n \int_{\Delta_m} \exp \{-\beta_n (z - z_m)^2\} dz \leq \\ &\leq e^{-\alpha_n} \cdot O(\sqrt{\alpha_n}) \cdot O(1) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае (б)

$$\begin{aligned} B_n \int_{\Delta_m} \varphi_n(z) dz &\leq e^{-\alpha_n} O(\sqrt{\beta_n}) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \{-\beta_n (z - z_m)^2\} dz = \\ &= e^{-\alpha_n} O(\sqrt{\beta_n}) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\beta_n}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (3) — (7) вытекает достаточность условий теоремы.

Математический институт  
им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
8 V 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> R. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1931. <sup>2</sup> R. Mises, Giorn. Inst. Ital. d. Attuari, 5, 483 (1934). <sup>3</sup> Bawly, Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. S., 2, fasc. 2, 79 (1937). <sup>4</sup> Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1949. <sup>5</sup> Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, 1947.