

В. Н. КОСТАРЧУК

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ И ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ
МАТРИЦЫ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 25 VI 1954)

В настоящей заметке мы указываем итерационный процесс для решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно-определенной матрицей, который одновременно дает возможность найти собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному числу этой матрицы. Этот процесс имеет некоторое сходство с процессом, соответствующим методу скорейшего спуска. Их существенное различие можно геометрически описать следующим образом. Как известно ⁽¹⁾, геометрический смысл метода скорейшего спуска состоит в том, что для отыскания центра семейства подобных эллипсоидов начинают с произвольной точки одного из эллипсоидов и двигаются по нормали к этому эллипсоиду до точки касания этой нормали с некоторым другим эллипсоидом данного семейства. Затем процесс повторяется, и таким образом строится последовательность точек, сходящаяся к общему центру эллипсоидов. Наш процесс для решения той же задачи отличается тем, что, начиная двигаться с произвольной точки одного из эллипсоидов по нормали к нему, мы доходим до второй точки пересечения нормали с этим же эллипсоидом. Затем процесс повторяется. Таким образом получается последовательность пар точек, лежащих на исходном эллипсоиде и соответственно сходящихся к двум вершинам его наименьшей оси. Зная эти вершины, мы легко находим центр эллипсоида, а также направление наименьшей оси.

1. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Bx = b, \quad (1)$$

где b — заданный вектор; x — искомый вектор; B — положительно-определенная матрица.

Как известно ⁽¹⁾, решение этой системы x^* является точкой, где достигается минимум функционала $F(x) = (Bx - b, x - B^{-1}b)$. Пусть x_0 — произвольный начальный вектор. Построим вектор x_1 вида $x_1 = x_0 + c_1 \text{grad } F(x_0)$ и определим коэффициент c_1 из условия $F(x_1) = F(x_0)$. Непосредственным вычислением получаем формулу $x_1 = x_0 - 2 \frac{(\Delta_0, \Delta_0)}{(B\Delta_0, \Delta_0)} \Delta_0$, где $\Delta_0 = Bx_0 - b$ — невязка уравнения (1), соответствующая вектору x_0 .

Продолжая этот процесс, мы получаем последовательность элементов x_n , связанных между собой рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = Lx_n = x_n - 2 \frac{(\Delta_n, \Delta_n)}{(B\Delta_n, \Delta_n)} \Delta_n, \quad (2)$$

где $\Delta_n = Bx_n - b$ — невязка уравнения (1), соответствующая вектору x_n . Заметим, что оператор L является непрерывным. Приведем еще

формулу, связывающую последовательные невязки:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n - 2 \frac{(\Delta_n, \Delta_n)}{(B\Delta_n, \Delta_n)} B\Delta_n. \quad (3)$$

2. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы B , соответствующих собственным числам $M = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n = m$, и пусть $\Delta_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(0)} e_i$, причем $\xi_1^{(0)} \neq 0$. Тогда имеет место следующая лемма:

Лемма 1. Если $\Delta_k = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} e_i$ не является собственным вектором матрицы B и $\xi_1^{(k)} \neq 0$, то $|\xi_1^{(k+1)}| > |\xi_1^{(k)}|$, $\text{sign } \xi_1^{(k+1)} = -\text{sign } \xi_1^{(k)}$.

Доказательство. Формула (3) дает $\Delta_{k+1} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} \left(1 - 2 \frac{\sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)2}}{\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \xi_j^{(k)2}} \right) e_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(k+1)} e_i$. Отсюда коэффициент $\xi_1^{(k+1)}$ при собственном векторе

$$e_1, \text{ равный } \xi_1^{(k+1)} = \xi_1^{(k)} \left(1 - 2 \frac{\sum_{j=1}^n \xi_j^{(k)2}}{\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \xi_j^{(k)2}} \right), \text{ по абсолютной величине мо-}$$

нотонно возрастает на каждом шаге итерационного процесса, если Δ_k не является собственным вектором матрицы B ($|\xi_1^{(k+1)}| > |\xi_1^{(k)}|$). Из того же выражения видно, что $\text{sign } \xi_1^{(k+1)} = -\text{sign } \xi_1^{(k)}$. Лемма доказана.

Следствие. Если последовательность $\{\Delta_n\}$ стремится к некоторому собственному вектору матрицы B , то ее пределом $\bar{\Delta}$ может быть только вектор, пропорциональный вектору e_1 . Кроме того, так как $\text{sign } \xi_1^{(k+1)} = -\text{sign } \xi_1^{(k)}$, таких предельных элементов должно быть два (отличаются друг от друга знаком), и к ним сходятся, соответственно, подпоследовательности невязок четных и нечетных приближений.

Из формул (3) и (2) легко видеть, что, если вектор x_k таков, что невязка Δ_k является собственным вектором матрицы B , то $\Delta_{k+p} = (-1)^p \Delta_k$, $x_{k+2p} = x_k$, $x_{k+2p+1} = x_{k+1}$.

При этом появление в последовательности $\{\Delta_n\}$ невязки, являющейся собственным вектором матрицы B , вполне возможно. В этом случае последовательность $\{\Delta_n\}$, очевидно, тоже сходится к вектору $\bar{\Delta}$, пропорциональному e_1 , но будет конечной. В дальнейшем случай конечной последовательности $\{\Delta_n\}$ исключим из рассмотрения, как тривиальный, и будем считать, что в ходе итерационного процесса ни одна из невязок не становится собственным вектором матрицы B .

Лемма 2. Если невязка Δ_n не является собственным вектором матрицы B , то

$$\|Lx_n - x^*\| = \|x_{n+1} - x^*\| < \|x_n - x^*\|. \quad (4)$$

Доказательство. Из формулы (2) имеем $x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - 2 \frac{(\Delta_n, \Delta_n)}{(B\Delta_n, \Delta_n)} \Delta_n$, откуда, учитывая, что $x_n - x^* = B^{-1} \Delta_n$, получаем

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2 = -4 \frac{(\Delta_n, \Delta_n)}{(B\Delta_n, \Delta_n)} [B\Delta_n, \Delta_n)(B^{-1}\Delta_n, \Delta_n) - (\Delta_n, \Delta_n)^2].$$

Так как Δ_n не является собственным вектором матрицы B , то в силу неравенства Буняковского: $(B\Delta_n, \Delta_n)(B^{-1}\Delta_n, \Delta_n) - (\Delta_n, \Delta_n)^2 > 0$, откуда и следует утверждение леммы.

3. Последовательные приближения x_n строились таким образом, что $F(x_{n+1}) = F(x_n) = \dots = F(x_0) = C$. С другой стороны, $C = F(x_n) = (Bx_n - b, x_n - B^{-1}b) = (Bx_n - Bx^*, x_n - x^*) \leq M\|x_n - x^*\|^2$, где M — наибольшее собственное число матрицы B . Таким образом,

$$\|x_n - x^*\| \geq \sqrt{\frac{C}{M}}. \quad (5)$$

Обозначим $d = \inf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| > 0$. Из неравенств (4) и (5) вытекает существование подпоследовательности $\{x_{n'}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к некоторому элементу $\bar{x} \neq x^*$.

Лемма 3. *Всем предельным точкам $\bar{x}$ последовательности $\{x_n\}$ соответствуют невязки $\bar{\Delta}$ уравнения (1), являющиеся собственными векторами матрицы B .*

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Очевидно,

$$\|\bar{x} - x^*\| = d. \quad (6)$$

Из непрерывности оператора L следует $\lim_{n' \rightarrow \infty} x_{n'+1} = \lim_{n' \rightarrow \infty} Lx_{n'} = L\bar{x}$, и, далее,

$$\|L\bar{x} - x^*\| = d. \quad (7)$$

Если бы $\bar{\Delta}$ не являлось собственным вектором матрицы B , то равенства (6) и (7) противоречили бы неравенству (4). Лемма доказана.

Из доказанных положений следует, что существуют два различных предела последовательности $\{\Delta_n\}$, а значит, и последовательности $\{x_n\}$. К одному из них сходится подпоследовательность четных, к другому — нечетных приближений. Будем считать, что $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$, $L\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}$.

Согласно формуле (2), очевидно, будет иметь место формула

$$L\bar{x} = \bar{x} - \frac{2}{M} \bar{\Delta}. \quad (8)$$

Положим $\bar{\Delta}/M = e_M$. Тогда $e_M = pe_1$, причем коэффициент p имеет знак $\xi_1^{(0)}$. Тогда

$$L\bar{x} = \bar{x} - 2e_M. \quad (9)$$

Кроме того, так как $\bar{\Delta} = B\bar{x} - b = Me_M$, то учитывая, что $b = Bx^*$, имеем:

$$\bar{x} = e_M + x^* \quad (10)$$

и аналогично

$$L\bar{x} = -e_M + x^*. \quad (11)$$

Из формул (9), (10) и (11) получаем

$$e_M = \frac{\bar{x} - L\bar{x}}{2}, \quad (12)$$

$$x^* = \frac{\bar{x} + L\bar{x}}{2}. \quad (13)$$

Для характеристики монотонности процесса докажем еще следующую лемму:

Лемма 4. Процесс приближения последовательности $\{x_n\}$ к предельным элементам $\bar{x}$ и $L\bar{x}$ монотонен в том смысле, что

$$\|L^2x_{2n} - L^2\bar{x}\| < \|Lx_{2n} - L\bar{x}\| < \|x_{2n} - \bar{x}\|. \quad (14)$$

Доказательство. Найдем $\|Lx_{2n} - L\bar{x}\|^2$, пользуясь формулами (2) и (9) и учитывая, что $x_{2n} - x + e_M = x_{2n} - x^* = B^{-1}\Delta_{2n}$. Получим $\|Lx_{2n} - L\bar{x}\|^2 - \|x_{2n} - \bar{x}\|^2 = -4 \left\{ \frac{(\Delta_{2n}, \Delta_{2n})}{(B\Delta_{2n}, \Delta_{2n})^2} [(B\Delta_{2n}, \Delta_{2n})(B^{-1}\Delta_{2n}, \Delta_{2n}) - (\Delta_{2n}, \Delta_{2n})^2] + \frac{(\Delta_{2n}, e_M)}{(B\Delta_{2n}, \Delta_{2n})} \left[(\Delta_{2n}, \Delta_{2n}) - \frac{1}{M}(B\Delta_{2n}, \Delta_{2n}) \right] \right\}$. Здесь квадратные скобки больше нуля, а $(\Delta_{2n}, e_M) = p(\Delta_{2n}, e_1) = p \cdot \xi_1^{(2n)} > 0$. Поэтому выражение в фигурных скобках больше нуля, и одно из неравенств (14) доказано. Аналогично доказывается второе неравенство.

Все сказанное можно объединить в общую теорему.

Теорема. Построенный итерационный процесс дает последовательности четных и нечетных приближений, сходящиеся к таким элементам $\bar{x}$ и $L\bar{x}$, невязки которых пропорциональны собственному вектору, соответствующему наибольшему собственному числу матрицы B . Имеют место формулы

$$x^* = \frac{\bar{x} + L\bar{x}}{2}, \quad e_M = \frac{\bar{x} - L\bar{x}}{2}.$$

4. Можно дать оценку быстроты сходимости итерационного процесса, если Δ_0 считать достаточно близким к собственному вектору e_1 . Именно, если $\Delta_0 = \xi_1^{(0)}(e_1 + \varepsilon x)$, где ε — произвольное положительное, сколь угодно малое число, а $x = \sum_{i=2}^n \xi_i e_i$ и $\|x\| = 1$, то, как легко

показать, $\frac{\|\Delta_{k+1} - \xi_1^{(k+1)} e_1\|}{\|\Delta_k - \xi_1^{(k)} e_1\|} \leq q = \left| 1 - \frac{2\bar{\lambda}}{M} \right| + 2\varepsilon^2$, где $\bar{\lambda}$ равно или λ_2 или λ_n в зависимости от того, какое из них дает большую по абсолютному значению величину $|1 - 2\bar{\lambda}/M|$. Очевидно, что при достаточно малом ε величина $q < 1$, и поэтому итерационный процесс сходится со скоростью не меньшей, чем скорость сходимости геометрической прогрессии со знаменателем q .

Примечание 1. Если x_0 выбрано так, что Δ_0 является вектором из инвариантного подпространства, ортогонального к вектору e_1 , то последовательность невязок $\{\Delta_n\}$ сходится к собственному вектору, соответствующему наибольшему собственному числу матрицы в этом подпространстве.

Примечание 2. При решении системы линейных уравнений предполагаемый метод полезно комбинировать с методом скорейшего спуска.

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну за ряд ценных советов и указаний в процессе выполнения настоящей работы.

Поступило
24 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Б. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6, 89 (1948).