

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

О СОХРАНЕНИИ УСЛОВНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ МАЛОМ ИЗМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНА

Рассмотрим в $2s$ -мерном фазовом пространстве динамической системы с s степенями свободы область G , представленную в виде произведения s -мерного тора T на область S евклидова s -мерного пространства. Точки тора T будем характеризовать круговыми координатами $q_1, \dots, q_s$ (замена q_α на $q'_\alpha = q_\alpha + 2\pi$ не меняет точки q), координаты же точки p из S будем обозначать $p_1, \dots, p_s$. Будем предполагать, что в области G в координатах $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ уравнения движения имеют канонический вид

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q, p), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q, p). \quad (1)$$

Функция Гамильтона H далее предполагается зависящей от параметра θ и определенной при всех $(q, p) \in G$, $\theta \in (-c; +c)$, но не зависящей от времени. По существу дальнейшие рассмотрения имеют действительный характер, но требуют довольно значительных ограничений на гладкость функции $H(q, p, \theta)$, более сильных, чем бесконечная дифференцируемость. Для простоты во всем дальнейшем предполагается, что функция $H(q, p, \theta)$ аналитична по совокупности переменных (q, p, θ) .

Суммирование по греческим индексам предполагается далее распространенным от 1 до s . Употребляются обычные векторные обозначения: $(x, y) = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$, $|x| = +V(x, x)$. Целочисленным вектором называется вектор, все компоненты которого целые числа. Множество точек (q, p) из G с $p = c$ обозначается T_c . В теореме 1 предполагается, что S содержит точку $p = 0$, т. е. $T_0 \subseteq G$.

Теорема 1. Пусть

$$H(q, p, 0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \quad (2)$$

где m и λ_α — константы, и при некотором выборе констант $c > 0$ и $\eta > 0$ для всех целочисленных векторов n выполняется неравенство

$$(n, \lambda) \geq \frac{c}{|n|^\eta}. \quad (3)$$

Пусть, кроме того, детерминант, составленный из средних значений

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi_{\alpha\beta}(q) dq_1 \dots dq_s$$

функций

$$\Phi_{\alpha\beta}(q) = \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} H(q, 0, 0)$$

отличен от нуля:

$$|\varphi_{\alpha\beta}(0)| \neq 0. \quad (4)$$

Тогда существуют определенные для всех достаточно малых θ и для всех точек (Q, P) некоторой окрестности V множества T_0 аналитические функции $F_\alpha(Q, P, \theta)$ и $G_\alpha(Q, P, \theta)$, осуществляющие преобразование прикосновения

$$q_\alpha = Q_\alpha + \theta F_\alpha(Q, P, \theta), \quad p_\alpha = P_\alpha + \theta G_\alpha(Q, P, \theta)$$

V в $V' \subseteq G$, которое приводит H к виду

$$H = M(\theta) + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} P_{\alpha} + O(|P|^2) \quad (5)$$

($M(\theta)$ не зависит от Q и P).

Легко понять значение теоремы 1 для механики. Она показывает, что s -параметрическое семейство условно периодических движений

$$q_{\alpha} = \lambda_{\alpha} t + q_{\alpha}^{(0)}, \quad p_{\alpha} = 0,$$

существующее при $\theta = 0$, не может при условиях (2) и (3) исчезнуть в результате малого изменения функции Гамильтона H : произойдет лишь смещение огибаемого траекториями этих движений s -мерного тора T_0 в тор $P = 0$, который останется заполненным траекториями условно периодических движений с теми же частотами $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Преобразование

$$(Q, P) = K_{\theta}(q, p),$$

существование которого утверждается в теореме 1, может быть построено в виде предела преобразований

$$(Q^{(k)}, P^{(k)}) = K_{\theta}^{(k)}(q, p),$$

где преобразования

$$(Q^{(1)}, P^{(1)}) = L_{\theta}^{(1)}(q, p), \quad (Q^{(k+1)}, P^{(k+1)}) = L_{\theta}^{(k+1)}(Q^{(k)}, P^{(k)})$$

находятся при помощи «обобщенного метода Ньютона» (см. (1)). В этой заметке мы ограничимся построением преобразования $K_{\theta}^{(1)} = L_{\theta}^{(1)}$, что позволит уже понять роль условий (3) и (4) теоремы 1. Зададим преобразование $L_{\theta}^{(1)}$ формулами

$$Q_{\alpha}^{(1)} = q_{\alpha} + \theta Y_{\alpha}(q), \quad (6)$$

$$p_{\alpha} = P_{\alpha}^{(1)} = \theta \left\{ \sum_{\beta} P_{\beta}^{(1)} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} + \xi_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} X(q) \right\}$$

(легко проверить, что это преобразование прикосновения) и будем искать константы ξ_{α} и ζ и функции $X(q)$ и $Y_{\beta}(q)$, исходя из требования, чтобы

$$\begin{aligned} H = m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} p_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_{\alpha} p_{\beta} + \\ + \theta \left\{ A(q) + \sum_{\alpha} B_{\alpha}(q) p_{\alpha} \right\} + O(|p|^3 + \theta |p|^2 + \theta^2) \end{aligned} \quad (7)$$

имело вид

$$H = m + \theta \zeta + \sum \lambda_{\alpha} P_{\alpha}^{(1)} + O(|P^{(1)}|^2 + \theta^2). \quad (8)$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$H = m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} P_{\alpha}^{(1)} + \theta \left\{ A + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left(\xi_{\alpha} + \frac{\partial X}{\partial q_{\alpha}} \right) \right\} + \\ + \theta \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{(1)} \left\{ B_{\alpha} + \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) \left(\xi_{\beta} + \frac{\partial X}{\partial q_{\beta}} \right) + \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial q_{\beta}} \right\} + O(|P^{(1)}|^2 + \theta^2).$$

Таким образом, наше требование (8) сводится к тому, чтобы выполнялись уравнения

$$A + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left(\xi_{\alpha} + \frac{\partial X}{\partial q_{\alpha}} \right) = \zeta, \quad (9)$$

$$B_{\alpha} + \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta} \left(\xi_{\beta} + \frac{\partial X}{\partial q_{\beta}} \right) + \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial q_{\beta}} = 0. \quad (10)$$

Введем функции

$$Z_{\alpha}(q) = \sum_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) \frac{\partial}{\partial q_{\beta}} X(q). \quad (11)$$

Разложив функции $\Phi_{\alpha\beta}$, A , B_{α} , X , Y_{α} , Z_{α} в ряды Фурье вида

$$X(q) = \sum x(n) e^{i(n, q)}$$

и положив для определенности

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad (12)$$

получим для остальных подлежащих определению коэффициентов Фурье $x(n)$, $y_{\alpha}(n)$, $z_{\alpha}(n)$ и констант ξ_{α} и ζ уравнения

$$a(0) + \sum \lambda_{\alpha} \xi_{\alpha} = \zeta, \quad (13)$$

$$a(n) + (n, \lambda) x(n) = 0 \quad \text{при } n \neq 0, \quad (14)$$

$$b_{\alpha}(0) + \sum_{\beta} \varphi_{\alpha}(0) \xi_{\beta} + z_{\alpha}(0) = 0, \quad (15)$$

$$b_{\alpha}(n) + \sum_{\beta} \varphi_{\alpha\beta}(n) \xi_{\beta} + z_{\alpha}(n) + (n, \lambda) y_{\alpha}(n) = 0 \quad \text{при } n \neq 0. \quad (16)$$

Легко видеть, что система (11) — (16) однозначно решается при условиях (3) и (4). Условие (3) существенно при определении $x(n)$ из (14) и при определении $y_{\alpha}(n)$ из (16). Условие (4) существенно при определении ξ_{β} из (15). Так как коэффициенты рядов Фурье аналитических функций $\Phi_{\alpha\beta}$, A и B_{α} при возрастании $|n|$ имеют порядок убывания не меньше $\rho^{|n|}$, $\rho < 1$, то из условия (3) вытекает не только формальная разрешимость уравнений (13) — (16), но и сходимость рядов Фурье для функций X , Y_{α} и Z_{α} и аналитичность этих функций. Построение дальнейших приближений не связано с новыми трудностями. Несколько тоньше лишь использование условия (3) для доказательства сходимости отображений $K_{\theta}^{(h)}$ к аналитическому предельному отображению K_{θ} .

Условие отсутствия «малых знаменателей» (3) следует считать «вообще говоря» выполненным, так как при любом $\eta > s - 1$ для всех точек s -мерного пространства $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, кроме множества лебеговой меры нуль, можно найти $c(\lambda)$, при котором

$$(n, \lambda) \geq \frac{c(\lambda)}{|n|^{\eta}},$$

каковы бы ни были целые $n_1, n_2, \dots, n_s$ ⁽²⁾. Условие (4) тоже естественно считать «вообще говоря» выполненным. Так как

$$\varphi_{\alpha\beta}(0) = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \lambda_\beta(0),$$

где

$$\lambda_\beta(p) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{dq_\beta}{dt} dq_1 \dots dq_s$$

«средняя частота» по координате q_β при фиксированных импульсах $p_1, \dots, p_s$, то условие (3) обозначает, что якобиан средних частот по импульсам отличен от нуля.

Перейдем теперь к рассмотрению того специального случая, когда $H(q, p, 0)$ зависит только от p , т. е. $H(q, p, 0) = W(p)$. В этом случае при $\theta = 0$ каждый тор T_p состоит из полных траекторий условно периодических движений с частотами

$$\lambda_\alpha(p) = \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}.$$

Если якобиан

$$J = \left| \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial p_\beta} \right| = \left| \frac{\partial^2 W}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right| \quad (17)$$

отличен от нуля, то почти ко всем торам T_p можно применить теорему 1. Возникает естественное предположение, что при малых θ полученные в соответствии с теоремой 1 «сдвинутые торы» заполняют большую часть области G . Это и подтверждается указываемой далее теоремой 2. При формулировке этой теоремы будем считать область S ограниченной и введем в рассмотрение множество M_θ тех точек $(q^{(0)}, p^{(0)}) \in G$, для которых решение

$$q_\alpha(t) = f_\alpha(t; q^{(0)}, p^{(0)}, \theta), \quad p_\alpha(t) = G_\alpha(t; q^{(0)}, p^{(0)}, \theta)$$

системы уравнений (1) с начальными условиями

$$q_\alpha(0) = q_\alpha^{(0)}, \quad p_\alpha(0) = p_\alpha^{(0)}$$

приводит к траекториям, не выходящим при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ из области G , и условно периодически с периодами $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(q^{(0)}, p^{(0)}, \theta)$, т. е. имеет вид

$$f_\alpha(t) = \varphi_\alpha(e^{i\lambda_1 t}, \dots, e^{i\lambda_s t}), \quad g_\alpha(t) = \psi_\alpha(e^{i\lambda_1 t}, \dots, e^{i\lambda_s t}).$$

Теорема 2. Если $H(q, p, 0) = W(p)$ и детерминант (17) не равен нулю в области S , то при $\theta \rightarrow 0$ лебеговская мера множества M_θ стремится к полной мере области S .

Повидимому, в известном смысле слова «общим случаем» является такой, когда множество M_θ при всех положительных θ имеет всюду плотное дополнение. На такого рода осложнения, возникающие в теории аналитических динамических систем, указано по более специальному поводу в моей заметке ⁽³⁾.

Поступило
31 VIII 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6, 163 (1948). ² J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, 1936. ³ А. Н. Колмогоров, ДАН, 93, 763 (1953).