

М. А. ЕВГРАФОВ

ПОЛНОТА БЛИЗКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 VI 1954)

Для теории функций имеет большое значение решение вопроса о том, будет ли система $\{\varphi_n(z)\}$ полна в некоторой области, т. е. в классе функций, регулярных в этой области. Одним из основных приемов решения этого вопроса являются результаты о полноте близких систем.

Теорема 1*. Если система функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна в области D ,

$$\varphi_n^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \varphi_k(z) + \varphi_n(z);$$

$$M_n = \max_{z \in D} |\varphi_n(z)|, \quad \sup_{0 \leq n < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{n,k}| \frac{M_k}{M_n} < 1,$$

то система $\{\varphi_n^{(1)}(z)\}$ также полна в области D .

Если мы сделаем дополнительное предположение, что система $\{\varphi_n(z)\}$ допускает биортогональную с ней систему $\{\psi_n(z)\}$, все функции которой регулярны вне D , то условие

$$\sup_{0 \leq n < \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{n,k}| \frac{M_k}{M_n} < 1$$

можно заменить условием

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{n,k}| \frac{M_k}{M_n} < 1.$$

Еще больший интерес представляет случай, когда система $\{\varphi_n(z)\}$ такова, что любая функция, регулярная в области D , может быть разложена, и притом единственным образом, в ряд по $\varphi_n(z)$, сходящийся в области $D_1 \subset D$.

Мы будем говорить, что оператор $L(F)$, определенный на классе функций, регулярных в области D , является линейным непрерывным оператором, если

$$L(F_1 + F_2) = L(F_1) + L(F_2), \quad L(cF) = cL(F)$$

и $L(F_n)$ равномерно стремится к нулю в любой замкнутой части области D , если $F_n(z)$ равномерно стремится к нулю в любой замкнутой части области D .

Линейный непрерывный оператор $L(F)$ мы назовем непрерывно обратимым, если уравнение $L(F) = f$ имеет единственное решение $F(z)$,

* Другие простейшие теоремы того же типа см. (1).

регулярное в D , для любой $f(z)$, регулярной в D , и если обратный оператор, определенный условием

$$L^{-1}(f) = F, \quad L(F) = f,$$

непрерывен.

Имеет место почти очевидное утверждение:

Теорема 2*. Пусть $L(F)$ — линейный непрерывный и непрерывно обратимый оператор, а система $\{\varphi_n(z)\}$ обладает тем свойством, что любая функция $F(z)$, регулярная в D , может быть разложена в ряд по $\varphi_n(z)$, равномерно сходящийся в любой замкнутой части D . Тогда система $\{\varphi_n^{(1)}(z)\}$, $\varphi_n^{(1)}(z) = L(\varphi_n(z))$, обладает тем же свойством.

В связи с этим интересна теорема:

Теорема 3. Линейный оператор

$$L(F) = F(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C K(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta,$$

$$K(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(z)}{\zeta^{n+1}}, \quad \varepsilon_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n,k} z^k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_{n,k}| R^{k-n} < 1,$$

непрерывен и непрерывно обратим в любом круге $|z| < r$, $r \leq R$.

Взяв, в частности, в качестве $\{\varphi_n(z)\}$ системы $\{z^n P(z)\}$ и $\{[\varphi(z)]^n P(z)\}$, приходим к следующим критериям:

Теорема 4. Система $\{\varphi_n(z)\}$

$$\varphi_n(z) = z^n \{P(z) + \varepsilon_n(z)\}, \quad \max_{|z| \leq R} |\varepsilon_n(z)| = \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad P(0) = 1,$$

образует базис в любом круге $|z| < r$, $r < R_1$, где $R_1 = \min(R, R_2)$, R_2 — расстояние от точки $z = 0$ до ближайшей особой точки $\ln P(z)$.

Теорема 5. Положим, что $\varphi_n(z) = [\varphi(z)]^n \{P(z) + \varepsilon_n(z)\}$, $\max_{z \in DR} |\varepsilon_n(z)| = \varepsilon_n \rightarrow 0$, $P(0) = 1$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, $\varphi(z)$ регулярна в

области D_R , являющейся связной частью множества $|\varphi(z)| < R$, содержащей точку $z = 0$. Тогда система $\{\varphi_n(z)\}$ образует базис в любой области D_ρ , $\rho < R_1$. Область D_ρ является связной частью множества точек, удовлетворяющих условию $|\varphi(z)| < \rho$, содержащей точку $z = 0$; $R_1 = \min(R_1, R_2, R_3)$; R_2 — расстояние до ближайшей особой точки $\ln P(\psi(z))$; R_3 — расстояние до ближайшей особой точки $\psi(z)$; $\psi(z)$ — функция, обратная к $\varphi(z)$, $\psi(0) = 0$.

Теорему 5 можно несколько усилить, отбросив требование регулярности $\varphi(z)$, т. е. допустив ее многозначность. В этом случае на $\varepsilon_n(z)$ уже нельзя накладывать условие равномерного стремления к нулю. Нужно провести в плоскости z ряд разрезов так, чтобы в разрезанной плоскости $\varphi(z)$ была однозначна, а на обеих сторонах разрезов принимала значения, равные по модулю. Относительно $\varepsilon_n(z)$ можно требовать, чтобы $\varepsilon_n(z)$ были равномерно ограничены и стремились к нулю равномерно в любой части области D_R , не содержащей разрезов.

Поступило
29 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. P. Boas, Proc. Acad. Nat. Sci. USA, 26, 139 (1940). ² М. Г. Хапланов, ДАН, 90, № 6, 970 (1953).

* Для одного из случаев см. (2).