

Д. А. ГУДКОВ

ПОЛНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ НЕОСОБЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ 6-го ПОРЯДКА В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 VI 1954)

1. Довольно просто перечислить все логически возможные (с учетом теорем Безу и Гарнака ⁽¹⁾) топологические типы неособых кривых до 5-го порядка включительно и доказать построением по методам Гарнака и Гильберта ⁽²⁾, что эти кривые существуют.

2. Топологический тип неособой кривой 6-го порядка C_6 будем обозначать: а) через k , если C_6 состоит из k овалов, лежащих вне друг друга; б) через $\frac{k}{1}l$, если C_6 состоит из овала α (главный), внутри которого находится k овалов вне друг друга (внутренние овалы) и l овалов вне овала α и вне друг друга (внешние овалы); в) через 0, если C_6 не имеет действительных точек; г) через $(1, 1, 1)$, если C_6 состоит из 3 овалов, вложенных последовательно друг в друга. Легко видеть, что, если C_6 имеет 3 овала, вложенные друг в друга, то она не может иметь более овалов и имеет топологический тип $(1, 1, 1)$. По теореме Гарнака ⁽¹⁾ число овалов C_6 не более 11. Поэтому получаем следующие 68 логически возможных топологических типов неособых кривых C_6 :

Схема 1

$\frac{10}{1}$	$\frac{9}{1}1$	$\frac{8}{1}2$	$\frac{7}{1}3$	$\frac{6}{1}4$	$\frac{5}{1}5$	$\frac{4}{1}6$	$\frac{3}{1}7$	$\frac{2}{1}8$	$\frac{1}{1}9$	11
$\frac{9}{1}$	$\frac{8}{1}1$	$\frac{7}{1}2$	$\frac{6}{1}3$	$\frac{5}{1}4$	$\frac{4}{1}5$	$\frac{3}{1}6$	$\frac{2}{1}7$	$\frac{1}{1}8$	10	
$\frac{8}{1}$	$\frac{7}{1}1$	$\frac{6}{1}2$	$\frac{5}{1}3$	$\frac{4}{1}4$	$\frac{3}{1}5$	$\frac{2}{1}6$	$\frac{1}{1}7$	9		
$\frac{7}{1}$	$\frac{6}{1}1$	$\frac{5}{1}2$	$\frac{4}{1}3$	$\frac{3}{1}4$	$\frac{2}{1}5$	$\frac{1}{1}6$	8			
$\frac{6}{1}$	$\frac{5}{1}1$	$\frac{4}{1}2$	$\frac{3}{1}3$	$\frac{2}{1}4$	$\frac{1}{1}5$	7				
$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{1}1$	$\frac{3}{1}2$	$\frac{2}{1}3$	$\frac{1}{1}4$	6					
$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{1}1$	$\frac{2}{1}2$	$\frac{1}{1}3$	5						
$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{1}1$	$\frac{1}{1}2$	4							
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}1$	3								
$\frac{1}{1}$	2									

3. Кривая C_6 типа $\frac{1}{1}9$ была построена Гарнаком ⁽¹⁾, а $\frac{9}{1}1$ — Гильбертом ⁽²⁾. Гильберт в 1891 г. высказал гипотезу, что C_6 типа 11 не существует. Доказательству гипотезы Гильберта было посвящено несколько работ. Считалось, что эта гипотеза доказана Роном ⁽³⁾. Однако в этой работе Рон использует неверную теорему. Лишь в 1938 г. И. Г. Петровский ⁽⁴⁾ доказал общую теорему, из которой гипотеза Гильберта следует как частный случай. Теорема Петровского не исключает существования кривых C_6 остальных топологических типов схемы 1. И. Г. Петровский поставил вопрос: неособые кривые C_6 каких топологических типов существуют? В настоящей статье дается полное решение этого вопроса.

4. Теорема 1. *Неособые кривые C_6 топологических типов, расположенных в схеме 1 ниже ломаной линии, существуют (всего 53 топологических типа).*

Доказательство. Очевидно, кривые C_6 типов 0 и $(1, 1, 1)$ существуют. Кривые типов $\frac{1}{1}9$ и $\frac{9}{1}1$ построены Гарнаком и Гильбертом. Незначительным изменением приемов построения можно построить кривые типов $\frac{6}{1}2$, $\frac{4}{1}5$ и $\frac{2}{1}6$. Остальные из указанных кривых получаются уменьшением числа внутренних и внешних овалов довольно простым изменением в построении указанных 5 кривых.

Теорема 2 (основная). *Неособых кривых C_6 топологических типов: $\frac{10}{1}$; $\frac{8}{1}2$; $\frac{7}{1}3$; $\frac{6}{1}4$; $\frac{5}{1}5$; $\frac{4}{1}6$; $\frac{3}{1}7$; $\frac{2}{1}8$; $\frac{7}{1}2$; $\frac{6}{1}3$; $\frac{5}{1}4$; $\frac{3}{1}6$; $\frac{2}{1}7$; $\frac{5}{1}3$ не существует.*

Все последующие рассуждения имеют целью указать схему доказательства этой теоремы.

5. По недостатку места изложим идею доказательства несуществования лишь кривых $\frac{3}{1}7$; $\frac{2}{1}8$; $\frac{2}{1}7$. Для остальных кривых доказательства аналогичны. Назовем кривую нормальной, если все ее особые точки простые двойные, и особой кривой в противном случае.

Лемма 1. *Если существует неособая кривая C_6 одного из типов $\frac{3}{1}7$; $\frac{2}{1}8$; $\frac{2}{1}7$, то существует нормальная уникурсальная кривая C_6 с 3 узлами и 7 изолированными точками, изображенная на рис. 1.*

Доказательство. Пусть $F_0 = 0'$ — уравнение неособой кривой типа $\frac{3}{1}7$ и $F_0 > 0$ внутри внешних овалов. Возьмем кривую C_3 через 7 точек, по одной на каждом из внешних овалов и через 2 на 2 внутренних овалах. Рассмотрим пучок

$$F \equiv (1 - \delta)F_0 + \delta C_3^2 = 0 \quad (1)$$

и будем изменять δ от 0 к 1. Тогда внешние и главный овалы сжимаются, а внутренние расширяются. Можно показать, что при некотором δ^* , $0 < \delta^* < 1$, возникает кривая F_1 , имеющая узел (2 или 3 узла) от объединения внутренних или внутреннего с главным овалов. Проводя затем C_3 через этот узел и поступая аналогично, получим кривую F_2 с 2 узлами и т. д. В конце концов придем к нормальной уникурсальной кривой F_{10} с 3 узлами внутри главного овала и 7 изолированными внешними точками. Затем возьмем C_3 через 7 изолированных точек и 2 узла из 3; тогда, применяя опять пучок типа (1), получим, наконец, кривую рис. 1. Аналогично существование кривых типов $\frac{2}{1}8$ и $\frac{2}{1}7$ приводит к существованию кривой F_{10} рис. 1.

Выберем 8 из 10 особых точек кривой рис. 1, именно: 3 узла и

5 изолированных точек. Обозначим их через $D_1, \dots, D_8$. 2 оставшиеся особые точки обозначим D_9 и D_{10} . Проведем через $D_1, \dots, D_8, D_9$ кривую 3-го порядка ω_9 , а через $D_1, \dots, D_8, D_{10}$ кривую 3-го порядка ω_{10} . Пусть D_0 — 9-я точка пересечения кривых ω_9 и ω_{10} . Составим пучок

$$\mu\omega_9 + \nu\omega_{10} = 0. \quad (2)$$

Лемма 2. Можно так проварьировать ⁽⁵⁾ (т. е. незначительно сместить) особые точки $D_1, \dots, D_8$, что: D_0 будет отлична от них; в пучке (2) будет не более 12 нормальных уникурсальных, а остальные кривые без особых точек; произведение двух различных кривых пучка (2) будет нормальной кривой.

Множество кривых S_6 , имеющих в $D_1, \dots, D_8$ по крайней мере простые двойные точки, образует в R_{27} — в пространстве всех кривых 6-го порядка — линейное подпространство 3 измерений $\tilde{R}_3$, которое исчерпывается кривыми

$$F \equiv cg + \alpha\omega_9^2 + 2\beta\omega_9\omega_{10} + \gamma\omega_{10}^2 = 0, \quad (3)$$

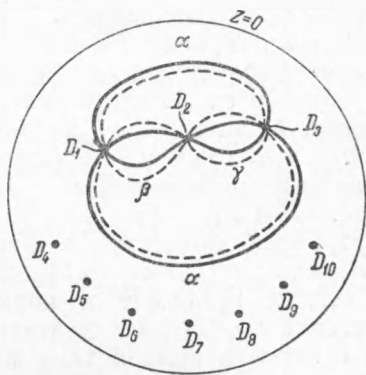


Рис. 1

где $g \in \tilde{R}_3$, но не принадлежит семейству $\alpha\omega_9^2 + 2\beta\omega_9\omega_{10} + \gamma\omega_{10}^2$, а c, α, β, γ — действительные параметры, не равные одновременно нулю. Кривые при $c=0, \beta^2 = \alpha\gamma$ являются квадратами кривых пучка (2). Такие кривые будем обозначать φ^2 . Для построения $\tilde{R}_3$ по формуле (3) можно взять любые 2 различные действительные кривые пучка. Кривые $F \in \tilde{R}_3$ и распадающиеся в 2 уникурсальные кривые пучка (2) обозначим $F_{11}(c=0)$. Кривые в $\tilde{R}_3$, имеющие 9 особых точек, образуют линейчатую поверхность (F_9) , прямолинейные образующие которой проходят через кривую $c=0, \beta^2 = \alpha\gamma$.

Лемма 3. Можно так проварьировать точки $D_1, \dots, D_8$, что вновь полученное пространство R_3 будет обладать следующими свойствами:

1°. нормальные уникурсальные F_{10} образуют в R_3 регулярную алгебраическую кривую $\{F_{10}\}$ (следовательно, любая ее ветвь замкнута в R_3). Эта кривая имеет конечное число особых точек (которые соответствуют распадающимся или особым уникурсальным кривым).

2°. На кривой $\{F_{10}\}$ имеется конечное число распадающихся кривых при $c \neq 0$. Будем их обозначать $F_{11}(c \neq 0)$. Эти кривые нормальные.

3°. На кривой $\{F_{10}\}$ может быть конечное число особых уникурсальных кривых только следующих типов: а) $F_{7\tau}$ — имеющих в 7 точках из $D_1, \dots, D_8$ простые двойные и в одной — простую тройную; б) F_{7c1} — имеющих в 7 точках из $D_1, \dots, D_8$ простые двойные, в одной из них — обычное самосоприкосновение и еще одну простую двойную точку; в) F_{8c} — в $D_1, \dots, D_8$ простые двойные и в некоторой точке S обычное самосоприкосновение; г) F_{9b} — в $D_1, \dots, D_8$ простые двойные точки и еще одну простую двойную точку и одну точку возврата; д) F_{7b2} — в 7 точках из $D_1, \dots, D_8$ — простые двойные точки, в одной из них точку возврата и еще 2 простые двойные точки.

Пространство R_3 , полученное после вариации точек $D_1, \dots, D_8$ по леммам 2 и 3, назовем грубым. Алгебраическая кривая $\{F_{10}\}$ может проходить через указанные в лемме 3 особые уникурсальные и через $F_{11}(c=0), \varphi^2$ и $F_{11}(c \neq 0)$.

Лемма 4. Уникурсальная кривая рис. 1 не существует.

Доказательство. Предположим противное. Получающаяся из кривой рис. 1 топологически тождественная нормальная уникурсальная F_{10} при вариации точек $D_1, \dots, D_8$ по леммам 2 и 3 будет лежать в грубом R_3 на кривой $\{F_{10}\}$. Будем теперь перемещаться в R_3 по $\{F_{10}\}$. Тогда оказывается, что при перемещении в одну сторону по $\{F_{10}\}$ граничная кривая α (рис. 1) сжимается, а в другую — расширяется. Будем двигаться все время так, чтобы α сжималась. Тогда при движении мы никогда не вернемся в пройденные точки. При таком движении по $\{F_{10}\}$ внутренние овалы β и γ расширяются, точки D_9 и D_{10} перемещаются. Эта I стадия движения должна закончиться переходом кривой F_{10} в F_{8c} ($F_{10} \rightarrow F_{8c}$), так как остальные переходы и замкнутое движение невозможны. Точка самосоприкосновения S образуется от объединения двух подвижных точек D_9 и D_{10} . Оказывается, из точки $F_{8c} \in R_3$ можно продолжить движение по $\{F_{10}\}$ со сжатием α , причем подвижные особые точки D_9 и D_{10} становятся минимыми сопряженными — II стадия, которая должна опять окончиться переходом $F_{10} \rightarrow F_{8c}$. После этого: если S — изолированная точка во внутренней области, то двинемся по прямолинейной образующей поверхности (F_9) со сжатием α — III стадия (9-я особая точка в S). III стадия приводит к нормальной уникурсальной F_{10} , от которой, двигаясь по $\{F_{10}\}$ со сжатием α , — IV стадия — придем к кривой типа F_{8c} и затем к кривой того же типа, как во II стадии, но со сжатием α . Если точка S происходит от самосоприкосновения α , то, двигаясь по прямолинейной образующей поверхности (F_9) (стадия IIIa), приходим к кривой F_{10} типа I стадии, но со сжатием α . Наконец, если S возникает от соприкосновения дуги α с β или γ (рис. 1), то можно доказать, что это невозможно. Для этого продолжим движение по $\{F_{10}\}$ со сжатием α — из S возникает 2 узла D_9 и D_{10} . Затем выберем точки D_9 и D_{10} другим способом (другое подпространство R_3), именно изолированные. Вариацией новых точек $D_1, \dots, D_8$ опять получим грубое пространство R_3 . Перемещаясь в нем по прямолинейной образующей поверхности (F_9) , получим две возможные кривые F_{10} . При движении от обеих из этих кривых по $\{F_{10}\}$ со сжатием α невозможен переход ни к какой из особых уникурсальных или распадающихся. Поскольку ветвь алгебраической кривой $\{F_{10}\}$, по которой мы двинемся, замкнута, а вернуться в пройденные точки мы не можем (α сжимается), то полученные две кривые существовать не могут. Таким образом, получаем такие последовательности стадий: $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow IV \rightarrow II$ или $I \rightarrow II \rightarrow IIIa \rightarrow I$. Но переходы $I \rightarrow II$, $II \rightarrow III$, $III \rightarrow II$, $II \rightarrow I$ происходят через кривые типа F_{8c} , которых конечное число, в R_3 движение не может замкнуться, так как α сжимается. Следовательно, после прохождения через последнюю возможную кривую F_{8c} опять получим движение по ветви кривой $\{F_{10}\}$ или по прямолинейной образующей поверхности (F_9) . Движение не замыкается и невозможен уже никакой переход к особым уникурсальным или распадающимся. Это противоречие доказывает лемму.

Из лемм 1 и 4 следует, что кривые C_6 типов $\frac{3}{1} 7$; $\frac{2}{1} 8$; $\frac{2}{1} 7$ не существуют. Указанная выше ошибка в работе (3) состоит в том, что при проведении доказательства леммы, аналогичной лемме 4, для кривой C_6 типа II во II стадии возможен переход $F_{10} \rightarrow \varphi^2$, тогда как Рон доказывает (с ошибкой), что такой переход невозможен.

Поступило
19 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Nagasaki, Math. Ann., 10, 189 (1876). ² D. Hilbert, *ibid.*, 38, 115 (1891).
³ K. Rohlf, *ibid.*, 73, 177 (1913). ⁴ И. Г. Петровский, Ann. Math., 39, No. 1 (1938). ⁵ Д. А. Гудков, ДАН, 98, № 3 (1954).