

Б. И. ПЛОТКИН

О НИЛЬРАДИКАЛЕ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1954)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа и $R(\mathfrak{G})$ — ее максимальный локально-нильпотентный нормальный делитель. $R(\mathfrak{G})$ содержит все локально-нильпотентные нормальные делители группы $\mathfrak{G}$ и является характеристической подгруппой. Назовем $R(\mathfrak{G})$ нильрадикалом группы $\mathfrak{G}$. Элемент $g \in \mathfrak{G}$ называется нильэлементом, если для любого $h \in \mathfrak{G}$ найдется номер k такой, что

$$[g \overbrace{[g, \dots [g, h] \dots]}^{k \text{ раз}}] = 1.$$

Очевидно, каждый элемент нильрадикала является нильэлементом. Естественно возникает вопрос: когда нильрадикал совпадает с множеством всех нильэлементов группы. Целью заметки является теорема:

Теорема. В локально разрешимой группе нильрадикал совпадает с множеством всех нильэлементов группы.

Для частного случая конечных разрешимых групп этот результат известен ⁽³⁾.

Вначале докажем ряд лемм, имеющих, впрочем, и самостоятельное значение.

Лемма 1. Если H — инвариантная подгруппа в F , то $R(H)$ — инвариантная подгруппа в $R(F)$, причем $R(H) = H(F) \cap H$.

Доказательство. Так как $R(H)$ характеристична в H и H инвариантна в F , то $R(H)$ инвариантна в F . Поэтому $R(H) \subseteq R(F)$, так как $R(F)$ содержит все локально-нильпотентные нормальные делители из F . Остальное следует из соотношения

$$R(H) \subseteq R(F) \cap H \subseteq R(H).$$

Следствие. Если между подгруппами H и F можно провести конечный нормальный ряд $H \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = F$, то этому ряду будет соответствовать нормальный ряд нильрадикалов

$$R(H) \subseteq R(H_1) \subseteq \dots \subseteq R(H_{n-1}) \subseteq R(H_n) = R(F).$$

Лемма 2. Пусть группа $\mathfrak{G}$ обладает локальной системой подгрупп (1) $\mathfrak{G}_\alpha$. Пусть в каждой подгруппе $\mathfrak{G}_\alpha$ выбран ее нормальный делитель N_α , причем из $\mathfrak{G}_\alpha \subseteq \mathfrak{G}_\beta$ следует $N_\alpha \subseteq N_\beta$.

Обозначим через N теоретико-множественное объединение всех N_α . Тогда N — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Для пары индексов α и β найдем γ такое, что $\mathfrak{G}_\alpha$ и $\mathfrak{G}_\beta$ содержатся в $\mathfrak{G}_\gamma$. Тогда, в силу свойства монотонности, N_α и N_β содержатся в N_γ . Отсюда N — подгруппа, для которой N_α образуют локальную систему. Покажем, что N — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$. Пусть $h \in N$ и $g \in \mathfrak{G}$. Тогда $h \in N_\alpha$ и $g \in \mathfrak{G}_\beta$. Найдем γ такое,

что $\mathfrak{G}_\alpha$ и $\mathfrak{G}_\beta$ содержатся в $\mathfrak{G}_\gamma$. Тогда $h \in N_\alpha \subset N_\gamma$ и $g \in \mathfrak{G}_\gamma$. Поэтому $g^{-1}hg \in N_\gamma \subset N$, что и требовалось.

Лемма 3. Пусть в группе $\mathfrak{G}$ задана локальная система подгрупп $\mathfrak{G}_\alpha$, причем если $\mathfrak{G}_\alpha \subset \mathfrak{G}_\beta$, то между $\mathfrak{G}_\alpha$ и $\mathfrak{G}_\beta$ можно провести конечный нормальный ряд. Тогда множество подгрупп $R(\mathfrak{G}_\alpha)$ образует локальную систему для $R(\mathfrak{G})$. В частности, все $R(\mathfrak{G}_\alpha)$ содержатся в $R(\mathfrak{G})$.

Доказательство. Из следствия леммы 1 и из условия следует, что если $\mathfrak{G}_\alpha \subset \mathfrak{G}_\beta$, то $R(\mathfrak{G}_\alpha) \subset R(\mathfrak{G}_\beta)$. Пусть R — объединение всех $R(\mathfrak{G}_\alpha)$. По лемме 3 R локально-нильпотентный нормальный делитель. Поэтому $R \subseteq R(\mathfrak{G})$. Так как $R(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G}_\alpha \subseteq R(\mathfrak{G}_\alpha)$, то $R(\mathfrak{G}) \subseteq R$, т. е. $R(\mathfrak{G}) = R$, что и доказывает лемму.

Лемма 4. Пусть H — нормальный делитель в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}/H$ — локально-нильпотентная группа. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — конечное множество элементов из $\mathfrak{G}$ и $\tilde{H} = \{H, x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Тогда $R(\tilde{H}) \subset R(\mathfrak{G})$.

Доказательство. Возьмем в $\mathfrak{G}/H$ локальную систему из nilпотентных подгрупп. Пусть $\mathfrak{G}_\alpha$ будут прообразы этих подгрупп в $\mathfrak{G}$. Система $\mathfrak{G}_\alpha$ является локальной системой в $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям леммы 3. Поэтому $R(\mathfrak{G}_\alpha) \subset R(\mathfrak{G})$ для всех α . Найдем такое γ , что $\tilde{H} \subset \mathfrak{G}_\gamma$. Между $\tilde{H}$ и $\mathfrak{G}_\gamma$, очевидно, можно провести конечный нормальный ряд. Поэтому $R(\tilde{H}) \subset R(\mathfrak{G}_\gamma) \subset R(\mathfrak{G})$, что и требовалось.

Лемма 5. Если группа $\mathfrak{G}$ обладает локальной системой подгрупп $\mathfrak{G}_\alpha$, причем в каждой $\mathfrak{G}_\alpha$ нильрадикал совпадает с множеством всех ее нильэлементов, то этим свойством будет обладать и вся группа $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Пусть x и y — два нильэлемента группы. Покажем, что и $z = xy$ тоже нильэлемент. Пусть $g \in \mathfrak{G}$. Найдем α такое, что x, y и $g \in \mathfrak{G}_\alpha$. x и y нильэлементы в $\mathfrak{G}_\alpha$ и, следовательно, содержатся в $R(\mathfrak{G}_\alpha)$. Так как каждый элемент из $R(\mathfrak{G}_\alpha)$ является

нильэлементом в $\mathfrak{G}_\alpha$, то при некотором k $[z \overbrace{[z, \dots [z, g] \dots]}^{k \text{ раз}}] = 1$. Таким образом, множество нильэлементов из $\mathfrak{G}$ образует подгруппу, причем, очевидно, инвариантную. Легко видеть, что эта подгруппа локально nilпотентна и, значит, она совпадает с $R(\mathfrak{G})$.

Определение. Ряд подгрупп

$$E = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_\alpha \subset N_{\alpha+1} \subset \dots \subset N_\gamma = \mathfrak{G}$$

назовем нильрядом группы $\mathfrak{G}$, если все N_α инвариантны в $\mathfrak{G}$, все факторы локально-нильпотентны и ряд доходит до $\mathfrak{G}$. Если для всех α $N_{\alpha+1}/N_\alpha$ — нильрадикал в $\mathfrak{G}/N_\alpha$, то такой ряд назовем нильрадикальным рядом.

Легко видеть, что если группа обладает нильрядом, то она обладает и нильрадикальным рядом, причем длина последнего не превосходит длины произвольного нильряда группы.

Теорема 1. Если группа обладает нильрадикальным рядом, то ее нильрадикал совпадает с множеством нильэлементов группы.

Доказательство. Теорема верна для групп, обладающих нильрадикальным рядом длины 1, так как они локально nilпотентны. Применим индукцию. Пусть теорема уже доказана для групп с нильрадикальным рядом длины $\alpha < \beta$, и пусть группа $\mathfrak{G}$ обладает нильрадикальным рядом длины β :

$$E = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_\beta = \mathfrak{G}. \quad (*)$$

Легко видеть, что для всех α отрезок ряда (*) до $\mathfrak{G}_\alpha$ будет нильрадикальным рядом в N_α . Поэтому все нильэлементы из N_α ($\alpha < \beta$)

лежат в N_1 . Докажем, что все нильэлементы из $\mathfrak{G}$ лежат в N_1 . Если β предельное, то это очевидно. Пусть $\beta = \mu + 1$ и g — нильэлемент. Допустим, что $g \notin N_\mu$. Рассмотрим два случая:

1) μ — предельное. Для всех $\alpha \leq \mu$ обозначим $\tilde{N}_\alpha = \{N_\alpha, g\}$. Все $\tilde{N}_\alpha$ при $\alpha < \mu$ образуют локальную систему в $\tilde{N}_\mu$. Ясно, что если $\alpha < \mu$, то $\tilde{N}_\alpha$ обладает нильрядом, а значит, и нильрадикальным рядом, с длиной меньшей μ . По предположению индукции все нильэлементы этих подгрупп должны принадлежать нильрадикалам этих подгрупп. Из леммы 5 следует, что все нильэлементы из $\tilde{N}_\mu$, в том числе и g , принадлежат $R(\tilde{N}_\mu)$.

По лемме 4 $R(\tilde{N}_\mu) \subset R(\mathfrak{G}) = N_1$. Значит и $g \in R(\mathfrak{G})$. Получилось противоречие с $g \notin N_\mu$.

2) Существует $\mu - 1$. Обозначим $\mathfrak{G}/N_{\mu-1} = \bar{\mathfrak{G}}$, $N_\mu/N_{\mu-1} = \bar{N}$. $\bar{N}$ — нильрадикал в $\bar{\mathfrak{G}}$ и $\bar{\mathfrak{G}}/\bar{N}$ локально-нильпотентна. $\bar{g} = gN_{\mu-1}$ — нильэлемент в $\bar{\mathfrak{G}}$. Из (2) следует, что $\{\bar{N}, \bar{g}\}$ локально-нильпотентная подгруппа, и поэтому она совпадает со своим нильрадикалом. По лемме 4 $R(\{\bar{N}, \bar{g}\}) = \{\bar{N}, \bar{g}\} \subseteq R(\bar{\mathfrak{G}}) = \bar{N}$. Но тогда $\bar{g} \in \bar{N}$, и снова противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим нормальным разрешимым рядом (вообще, трансфинитным), то ее нильрадикал состоит из всех нильэлементов группы.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что при условиях теоремы $R(\mathfrak{G}) \neq E$. Так как все фактор-группы группы $\mathfrak{G}$ удовлетворяют условиям теоремы, то $\mathfrak{G}$ обладает нильрадикальным рядом. Теперь теорема следует из теоремы 1.

Теорема, сформулированная в начале заметки, следует из теоремы 2 и леммы 5.

Свердловский горный институт
им. В. В. Вахрушева

Поступило
8 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Г. Курош, Теория групп, М., 1952. ² Б. И. Плоткин, ДАН, 94, № 6, 999 (1954). ³ E. Schenkman, Pacific J. Math., 3, № 2, 501 (1953).