

М. И. ГРАЕВ

ОСНОВНЫЕ СЕРИИ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ
ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФОРМ КОМПЛЕКСНОЙ
УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 VI 1954)

1. Как известно ⁽¹⁾, для отыскания всех вещественных форм простой комплексной группы Ли $\mathfrak{G}$ достаточно рассмотреть компактную форму группы $\mathfrak{G}$ и найти все инволютивные автоморфизмы этой компактной формы. Каждому такому автоморфизму отвечает вещественная форма группы $\mathfrak{G}$. Этот прием позволяет, исходя из совокупности комплексных простых групп Ли, дать полную классификацию вещественных простых групп Ли. В частности, комплексная унимодулярная группа матриц порядка n обладает следующими вещественными формами:

а) группа вещественных унимодулярных матриц порядка n ;

б) группа кватернионных унимодулярных матриц порядка $\frac{n}{2}$ (при четном n);

в) группа комплексных унимодулярных матриц порядка n , сохраняющих некоторую невырожденную эрмитову форму. Каждая такая группа задается с точностью до изоморфизма индексом соответствующей эрмитовой формы. Таким образом, число различных вещественных форм типа в) равно $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Отметим, что вещественные группы типа в) отвечают внутренним инволютивным автоморфизмам, в то время как группы типов а) и б) отвечают внешним автоморфизмам. В этом смысле группы типов а) и б) являются исключительными. Из других основных классов комплексных простых групп лишь группы D_n ортогональных матриц четного порядка имеют вещественную форму, отвечающую в нем у инволютивному автоморфизму их компактной формы.

Описание основных серий унитарных представлений групп типа а), т. е. вещественных унимодулярных групп, было проведено в ^(3,4). В данной заметке дается описание основных серий унитарных представлений вещественных форм типа в) комплексной унимодулярной группы. Оказывается, в частности, что для рассматриваемых групп существуют серии представлений (серии d_0), реализуемых в пространстве аналитических функций многих комплексных переменных, являющихся однородными многочленами относительно некоторых из этих переменных.

2. Пусть G — группа типа в), т. е. группа комплексных унимодулярных матриц порядка n , сохраняющих некоторую невырожденную эрмитову форму φ индекса m . Пусть p — число отрицательных и q — число положительных квадратов в каноническом представлении формы φ ; можно всегда предполагать, что $p \geq q$. Тогда $n = p + q$ и

$m = p - q$. Оказывается, что группа G имеет $q + 1$ различных типов классов сопряженных элементов. В соответствии с этим группа G имеет $q + 1$ основных серий унитарных представлений, которые мы обозначим через $d_0, d_1, \dots, d_q$. Ниже приводится описание этих серий.

3. Представления серии d_0 . Реализуем G как группу матриц, сохраняющих эрмитову квадратичную форму $\varphi(x, x)$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} -e_p & 0 \\ 0 & e_q \end{pmatrix},$$

где e_p и e_q — единичные матрицы, соответственно, порядков p и q . В соответствии с этим матрицы g группы G мы будем записывать в клеточном виде

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Представление реализуется в пространстве функций $f(z_{pp}, z_{qq}, z_{qp})$, где z_{ij} обозначает комплексную прямоугольную матрицу, составленную из i строк и j столбцов, причем эти функции обладают следующими свойствами:

а) При фиксированных z_{qq} и z_{qp} функция f представляет собой многочлен относительно элементов первой строки матрицы z_{pp} , миноров, составленных из элементов первых двух строк матрицы z_{pp} , и т. д., вплоть до миноров $p - 1$ -го порядка, составленных из первых $p - 1$ строк матрицы z_{pp} ; по отношению к минорам каждого заданного порядка функция f является однородным многочленом заданной степени однородности. Аналогичным свойством обладает функция f по отношению к элементам матрицы z_{qq} .

б) При фиксированных z_{pp} и z_{qq} функция f является аналитической функцией от pq элементов матрицы z_{qp} в области $z_{qp} z_{qp}^* < e_q$ (т. е. в области, где матрица $e_q - z_{qp} z_{qp}^*$ является положительно-определенной). Известно ⁽⁶⁾, что указанная область является областью регулярности в pq -мерном комплексном пространстве.

в) При заданном целом r сходится интеграл

$$\|f\|^2 = \int |f(u_{pp}(e_p - z_{qp}^* z_{qp})^{-1/2}, u_{qq}(e_q - z_{qp} z_{qp}^*)^{-1/2}, z_{qp})|^2 \times \\ \times (\det(e_p - z_{qp}^* z_{qp}))^{-q} (\det(e_q - z_{qp} z_{qp}^*))^{r-p} d\mu(u_{pp}) d\mu(u_{qq}) d\mu(z_{qp}). \quad (1)$$

Здесь u_{pp} и u_{qq} — унитарные матрицы, соответственно, порядков p и q . Через $d\mu(u_{pp})$ и $d\mu(u_{qq})$ обозначены соответствующие инвариантные меры, а через $d\mu(z_{qp})$ — произведение дифференциалов вещественных и мнимых частей элементов матрицы z_{qp} . Интегрирование ведется по всем унитарным матрицам u_{pp} и u_{qq} и по многообразию матриц z_{qp} , удовлетворяющих условию $z_{qp} z_{qp}^* < e_q$.

По отношению к скалярному произведению, определяемому в соответствии с (1), совокупность таких функций образует гильбертово пространство H_r . Оператор представления, отвечающий матрице

$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, задается в пространстве H_r следующим образом:

$$T_g f(z_{pp}, z_{qq}, z_{qp}) = \\ = f[z_{pp}(g_{11} + z_{qp}^* g_{21}), z_{qq}(z_{qp} g_{12} + g_{22}), (z_{qp} g_{12} + g_{22})^{-1}(z_{qp} g_{11} + g_{21})] \times \\ \times (\det(z_{qp} g_{12} + g_{22}))^{-r}. \quad (2)$$

Итак, каждое представление серии d_0 задается $n - 1$ целым числом — числом r и степенями однородности функций f по отношению к элементам матриц z_{pp} и z_{qq} .

Вторая половина серии d_0 получается путем замены условия аналитичности функций f условием антианалитичности.

При $q = 0$ и произвольном n функции f зависят только от z_{pp} , и мы получаем (конечномерные) неприводимые представления группы унитарных матриц n -го порядка, реализуемые в пространствах однородных многочленов. С другой стороны, при $n = 2$ и $p = q = 1$ формулы (1) и (2) дают дискретную серию представлений вещественной унимодулярной группы матриц 2-го порядка, описанную впервые Баргманом ⁽⁵⁾.

Описанная серия представляет интерес в связи с автоморфными функциями многих переменных. Она позволяет получить новые классы таких функций.

4. Представления серии d_l ($0 < l \leq [\frac{n}{2}]$). Реализуем G как группу матриц, сохраняющих эрмитову квадратичную форму $\varphi(x, x)$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & e' & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где s — квадратная матрица порядка l вида

$$s = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а e' — матрица вида

$$e' = \begin{pmatrix} -e_{p'} & 0 \\ 0 & e_{q'} \end{pmatrix},$$

где $e_{p'}$ и $e_{q'}$ — единичные матрицы, соответственно, порядков $p' = p - l$, $q' = q - l$. В соответствии с этим, матрицы g группы G мы будем записывать в клеточной форме

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через z_l комплексную треугольную матрицу порядка l с единицами по главной диагонали и нулями над главной диагональю. Обозначим далее через z матрицы группы G вида

$$z = \begin{pmatrix} e_l & 0 & 0 \\ g_{21} & e_{p'+q'} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & e_{l'} \end{pmatrix},$$

где e_l и $e_{p'+q'}$ — единичные матрицы соответствующих порядков. Сохраним, наконец, обозначения z_{pp} , z_{qq} , z_{qp} предыдущего пункта.

Представления серии d_l строятся в пространстве H_r функций $f(z_{p'p'}, z_{q'q'}, z_{q'p'}, z_l, z)$, удовлетворяющих по отношению к $z_{p'p'}$, $z_{q'q'}$, $z_{q'p'}$ условиям а) — в) из п⁰ 3 и имеющих интегрируемый квадрат относительно параметров матриц z_l и z .

Норма в пространстве H_r задается в соответствии с формулой (1), где добавляется еще интегрирование по параметрам матриц z_l и z .

Опишем теперь операторы представлений серии d_l . Пусть g — произвольная матрица из G . Тогда матрицу zg можно однозначно представить в виде $zg = k\hat{z}$, где $\hat{z}$ — клеточная треугольная матрица

того же типа, что и z , а k — матрица из G вида

$$k = \begin{pmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} & \hat{g}_{13} \\ 0 & \hat{g}_{22} & \hat{g}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{g}_{33} \end{pmatrix}.$$

При этом элементы матрицы k являются рациональными функциями от элементов матрицы z . Матрица $\hat{g}_{22}$ в выражении для k имеет порядок $p' + q'$ и сохраняет невырожденную эрмитову форму порядка $p' + q'$ с матрицей $\begin{pmatrix} -e_{p'} & 0 \\ 0 & e_{q'} \end{pmatrix}$. Тогда оператор представления T_g , отвечающий матрице g , задается формулой

$$T_g f(z_{p'p'}, z_{q'q'}, z_{q'p'}, z_l, z) = \\ = T_{\hat{g}_{22}} T_{\hat{g}_{33}} f(z_{p'p'}, z_{q'q'}, z_{q'p'}, z_l, z) \cdot (\det \hat{g}_{33})^{-r'} |\det \hat{g}_{33}|^{r' + i\rho - p' - q'}, \quad (3)$$

где r' — целое, а ρ — вещественное число. В этой формуле $T_{\hat{g}_{22}}$ есть оператор вида (2), действующий на f как на функцию от $z_{p'p'}, z_{q'q'}, z_{q'p'}$. Оператор $T_{\hat{g}_{33}}$ есть описанный в (2) оператор основной серии представлений комплексной унитарной группы матриц порядка l , действующий на f как на функцию от z_l . Этот оператор имеет вид

$$T_{\hat{g}_{33}} f(z_l) = f(\hat{z}_l) \alpha(z_l, \hat{g}_{33}),$$

где $\hat{z}_l$ — треугольная матрица, получаемая из z_l преобразованием при помощи матрицы $\hat{g}_{33}$, а $\alpha(z_l, \hat{g}_{33})$ — описанная в (2) функция (см. там формулу (5.28)), задаваемая $l-1$ целым и $l-1$ вещественными числами. Таким образом, представления серии d_l задаются l вещественными и $n-l-1$ целыми числами.

Поступило
28 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Гантмахер, Матем. сборн., 5, (47), № 2 (1939). ² И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 36 (1950). ³ И. М. Гельфанд, М. И. Граев, ДАН, 86, № 3 (1952). ⁴ И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 3 (1953). ⁵ V. Bargmann, Ann. of Math., 48, 3 (1947). ⁶ К. Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, ИЛ, 1954.