

Д. А. ГУДКОВ

О ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЛОСКИХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ n -го ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 VI 1954)

1. Алгебраическое уравнение $C_n \equiv \sum_{\alpha+\beta+\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma = 0$, где $A_{\alpha\beta\gamma}$ — комплексные числа, а не все равные нулю, определяет в комплексной проективной плоскости $(x:y:z)$ алгебраическую кривую n -го порядка, которую обозначим через C_n . Будем рассматривать множество отношений $A_n^* = (A_{0,0,n}^* : A_{0,1,n-1}^* : \dots : A_{0,n,0}^*)$ как проективное пространство R_N^* размерности $N = \frac{n(n+3)}{2}$ над полем комплексных чисел. Тогда каждой точке пространства R_N^* взаимно-однозначно соответствует алгебраическая кривая C_n^* ⁽¹⁾. Подмножество в R_N^* , состоящее из действительных отношений A_n , само является проективным пространством той же размерности N , но над полем действительных чисел. Обозначим это подмножество через R_N и будем называть пространством действительных кривых n -го порядка.

2. В пространстве R_N^* (R_N) будем считать установленной метрику следующим образом: R_N^* (R_N) рассматриваем как единичную сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками в охватывающем евклидовом пространстве E_{N+1}^* (E_N). Расстоянием в R_N^* (R_N) между двумя точками A_n^* и B_n^* (A_n и B_n) считается наименьшее из расстояний $A_n^* B_n^*$ и $A_n^* (-B_n^*)$, где $-B_n^*$ диаметрально противоположна B_n^* ($A_n B_n$ и $A_n (-B_n)$). Через $S^*(C_n^*, \varepsilon)$ ($S(C_n, \varepsilon)$) будет обозначаться множество кривых в R_N^* (R_N), расстояния которых от C_n^* (C_n) меньше ε . Очевидно, что $S(C_n, \varepsilon) \subset S^*(C_n, \varepsilon)$.

3. Будем говорить, что две кривые C_n и C_m имеют одинаковый топологический тип, если существует топологическое преобразование действительной проективной плоскости самой в себя, устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных точек кривой C_n и множеством действительных точек кривой C_m .

Кривую $C_n \in R_N$ назовем грубой кривой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что все кривые в $S(C_n, \varepsilon)$ имеют тот же топологический тип, как и C_n (в действительной проективной плоскости, что предполагается также и в дальнейшем, когда речь идет о топологии кривой). Будем говорить, что C_n — кривая первой степени негрубости, если существует такое $\varepsilon > 0$, что в $S(C_n, \varepsilon)$ все кривые: а) либо грубые (к ним C_n не принадлежит); б) либо топологически тождественны с C_n . Наконец, C_n — k -й степени негрубости, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что в $S(C_n, \varepsilon)$ все кривые: а) либо меньшей степени негрубости, чем k

(к ним C_n не принадлежит); б) либо топологически тождественны с C_n . Эти понятия принадлежат А. А. Андронову.

4. Пусть кривая C_n^* проходит через точку D , т. е. $C_n^*(D)=0$. Это уравнение при закреплённой точке D и изменяющихся $A_{\alpha\beta\gamma}$ даёт гиперплоскость в R_N . Если $C_n \in R_N$ и D действительна, то уравнение $C_n(D)=0$ даёт гиперплоскость в R_N . Можно показать, что требование прохождения $C_n \in R_N$ через мнимую точку D даёт две линейно независимые гиперплоскости в R_N , причём в этом случае C_n проходит и через сопряжённую точку $\bar{D}$. Если $p+2q$ гиперплоскостей соответствующих, в вышеуказанном смысле, p действительным точкам D_i , $i=1, 2, \dots, p$, и q парам мнимых сопряжённых точек $D_j, \bar{D}_j$, $j=1, 2, \dots, q$, линейно независимы в R_N , то точки D_i , $i=1, \dots, p$, $D_j, \bar{D}_j$, $j=1, \dots, q$, назовём алгебраическими независимыми относительно n .

5. Для того чтобы кривая $F \in R_N^*$ была особой, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой точке D : $F'_x(D)=0$; $F'_y(D)=0$; $F'_z(D)=0$. Исключая из этих уравнений $x:y:z$, получим $P(A_{\alpha\beta\gamma}^*)=0$, где $P(A_{\alpha\beta\gamma}^*)$ — однородный многочлен относительно $A_{\alpha\beta\gamma}^*$ (2). $P=0$ есть уравнение гиперповерхности в R_N^* (а также в R_N , если $F \in R_N$). Пусть $F^0 \in R_N^*$. Если все коэффициенты $A_{\alpha\beta\gamma}^*$ выражены через q из них в виде степенных рядов с центром разложения в F^0 и сходящихся в $S^*(F^0, \varepsilon)$, то мы говорим, что дано регулярное многообразие в $S^*(F^0, \varepsilon)$, проходящее через F^0 , размерности q . Если $q=N-1$, то многообразие назовём полостью, если $q=1$, то регулярной кривой.

6. Теорема 1. Пусть $F^0 \in R_N^*$ и имеет в $D_0(x_0, y_0)$ простую двойную точку. Тогда можно найти такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что в $S^*(F^0, \varepsilon)$ кривые, имеющие в δ -окрестности D_0 ($\delta(D_0)$) двойную точку: 1) имеют в $\delta(D_0)$ точно одну простую двойную точку; 2) образуют в $S^*(F^0, \varepsilon)$ полость $P_{D_0}=0$; 3) если $F^0 \in R_N$ и D_0 действительна, то $P_{D_0}=0$ — действительная полость в $S(F^0, \varepsilon)$; 4) если $F^0 \in R_N$ и D_0 мнима, то F^0 имеет $\bar{D}_0$ тоже простой двойной точкой и кривые в $S(F^0, \varepsilon)$, имеющие особую точку в $\delta(D_0)$, образуют в $S(F^0, \varepsilon)$ регулярное многообразие размерности $N-2$ и имеют комплексно-сопряжённую простую двойную точку в $\delta(\bar{D}_0)$.

Доказательство. При доказательстве можно положить $z=1$. Сначала показывается, что при достаточно малых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ все кривые в $S^*(F^0, \varepsilon)$ имеют не более одной простой двойной точки в $\delta(D_0)$. Затем из системы $F'_x=0$, $F'_y=0$ можно найти x и y в виде сходящихся в $S^*(F^0, \varepsilon)$ степенных рядов по $A_{\alpha\beta\gamma}$ (кроме $A_{0,0,n}$), причём $x=x_0$, $y=y_0$ при $A_{\alpha\beta\gamma}=A_{\alpha\beta\gamma}^0$. Из уравнения $F=0$ найдём $A_{0,0,n}=F(A_{\alpha\beta\gamma}-A_{\alpha\beta\gamma}^0)$, где F — степенной ряд, сходящийся в $S^*(F^0, \varepsilon)$. В случае, если $F^0 \in R_N$ и D_0 действительна, ряд F имеет действительные коэффициенты. Две мнимые сопряжённые точки D_0 и $\bar{D}_0$ дают при $F^0 \in R_N$ две комплексно-сопряжённые полости в R_N^* , пересекающиеся по регулярному многообразию размерности $N-2$ в R_N .

Теорема 2. Касательная гиперплоскость к полости $P_{D_0}=0$ в точке $F^0 \in R_N^*$ дается уравнением $F(D_0) \equiv \sum A_{\alpha\beta\gamma}^* x_0^\alpha y_0^\beta = 0$.

Доказательство. Считая, что уравнение полости $P_{D_0}=0$ есть $F=0$, где x и y выражаются из уравнений $F'_x=0$ и $F'_y=0$, найдём коэффициенты касательной гиперплоскости $\left(\frac{\partial F}{\partial A_{pqr}}\right)_{D_0} = x_0^p y_0^q$, что и доказывает теорему.

Таким образом, кривые, проходящие через D_0 в плоскости $(x:y:z)$, составляют в R_N касательную гиперплоскость к $P_{D_0} = 0$ в точке F^0 .

Теорема 3. Пусть $F^0 \in R_N$ и имеет простую двойную действительную точку в D_0 . Тогда: 1) если D_0 — изолированная, то F есть эллиптическая точка полости $P_{D_0} = 0$; 2) если D_0 — узел, то F^0 — гиперболическая точка полости $P_{D_0} = 0$.

Доказательство. Если поместить начало координат в точку D_0 , то уравнение кривой F^0 примет вид $F^0 \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0$. Тогда найдем, что индикатриса Дюпена поверхности $P_{D_0} = 0$ в точке F^0 будет $A[F'_y(D_0)]^2 - 2BF'_x(D_0)F'_y(D_0) + C[F'_x(D_0)]^2 = h$, что и доказывает теорему.

Теорема 4. Пусть $F^0 \in R_N$ и имеет в D_0 простую двойную точку; тогда для достаточно малого $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что всякая кривая $F \in S^*(F^0, \varepsilon)$ и имеющая в $\delta(D_0)$ простую двойную точку, имеет в $\delta(D_0)$ с F^0 по крайней мере две общие точки.

Доказательство. Известно, что если две кривые C_n и $\tilde{C}_n$ пересекаются в n^2 точках, то при изменении коэффициентов кривых C_n и $\tilde{C}_n$ в достаточно малых сферах координаты точек пересечения являются непрерывными функциями коэффициентов. Доказательство основывается на этом факте и на теореме 2.

Заметим, что теорема 4 не очевидна, например, в случае $F^0 \in R_N$ и D_0 мнимой или действительной изолированной.

Кривую будем называть нормальной, если все ее особые точки простые двойные, и обозначать через F_k (k — число двойных точек).

Теорема 5. Пусть $F_k \in R_N$ и нормальная. Пусть двойные точки D_i , $i = 1, \dots, k$, кривой F_k алгебраически независимы относительно n . Тогда: 1) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ в $S(F_k, \varepsilon)$ имеется k полостей $P_{D_i} = 0$, проходящих через F_k ; 2) эти полости делят $S(F_k, \varepsilon)$ на 2^k областей, состоящих из грубых кривых; 3) F_k имеет k -ю степень негрубости.

Доказательство. Следует из определения алгебраической независимости точек, определения степеней негрубости и теорем 1 и 2.

Теорема 6. Пусть дана не распадающаяся нормальная алгебраическая кривая $F_k \in R_N$. Тогда ее k двойных точек алгебраически независимы относительно порядка n , если: 1) $k \leq 2n + 1$; 2) $k = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$, 3) $k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Доказательство. Для случая 1) можно построить распадающуюся кривую, состоящую из n прямых и проходящую через все двойные точки, кроме одной. Для случаев 2) и 3) можно провести кривую C_{n-3} , проходящую через все двойные точки кроме одной из них. Это и доказывает теорему.

Теорема 6 является частным случаем теоремы Лившица о независимости условий, накладываемых особыми точками⁽³⁾. Однако теорема 6 содержит более сильное утверждение.

Пусть кривая $F_k \in R_N$ и $k = p + q$. Мы будем говорить, что p двойных точек этой кривой «варьируемы», если можно по достаточно малому $\varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, что, выбрав произвольно точки $\tilde{D}_i \in \delta(D_i)$ при $i = 1, \dots, p$, можно найти в $S(F_k, \varepsilon)$ такую кривую $\tilde{F}_k$, которая имеет простые двойные точки в $\tilde{D}_i$ и по одной простой двойной точке в каждой $\delta(D_i)$ при $i = p + 1, \dots, p + q$.

Теорема 7. При указанных выше обозначениях для варируемости двойных точек кривой F_k достаточно, чтобы система $3p+q$ уравнений

$$F'_{kx}(D_i) = 0, \quad F'_{ky}(D_i) = 0, \quad F'_{kz}(D_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (1^1)$$

$$F_k(D_i) = 0, \quad i = p+1, \dots, p+q, \quad (1^2)$$

относительно $A_{\alpha\beta\gamma}$ была линейно независимой и $3p+q < N$.

Доказательство. Уравнения (1^1) определяют в R_N линейное подпространство R_{N-3p} кривых, имеющих в $D_1, \dots, D_p$ по крайней мере простые двойные точки, а в $S(F_k, \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ — точно простые двойные точки. Каждая из точек $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$ определяет полость в $S(F_k, \varepsilon)$. Все эти полости пересекаются по регулярному многообразию P_{N-q} размерности $N-q$. R_{N-3p} и P_{N-q} не могут касаться, так как уравнения (1) линейно независимы и пересекаются по многообразию размерности более нуля, так как $N-3p-q > 0$. При вариации точек $D_1, \dots, D_p$ линейное подпространство R_{N-3p} тоже смещается, но, по сказанному выше, в $S(F_k, \varepsilon)$ остаются точки пересечения R_{N-3p} с P_{N-q} . Доказательство завершено.

Теорема 8. Пусть $C_n \in R_N$ и является нормальной уникурсальной кривой, все особые точки которой действительны. Тогда при $p < \frac{3n-1}{2}$ любые p из особых точек кривой C_n варируемы.

Доказательство. $p+q = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, поэтому $3p+q < \frac{n(n+3)}{2} = N$, так как $p < \frac{3n-1}{2}$. Допустим, что система (1) для нашего случая линейно зависима. Проведем кривую $\tilde{C}_n$, удовлетворяющую системе (1) . Тогда на коэффициенты кривой $\tilde{C}_n$ можно наложить еще не менее чем $N - (3p+q) + 1$ условий. Потребуем, чтобы $\tilde{C}_n$ проходила еще через $N - (3p+q)$ точек на C_n и через одну точку, не лежащую на C_n . Тогда $\tilde{C}_n$ и C_n — различные кривые и имеют не менее $n^2 + 1$ общую точку, что невозможно. Теорема доказана.

Горьковский
государственный университет

Поступило
14 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Уокер, Алгебраические кривые, М., 1952, стр. 75. ² Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. II, М. — Л., 1937, стр. 25. ³ Coolidge, Algebraic Plane Curves, Oxford, 1931, стр. 104.