

Н. И. АХИЕЗЕР

О НЕКОТОРЫХ СПАРЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 VI 1954)

1. Многие смешанные краевые задачи математической физики сводятся к нахождению неизвестной функции, если результат применения к ней одного интегрального оператора известен на одной части некоторого интервала, а результат применения второго интегрального оператора известен на остальной части указанного интервала. В этих случаях говорят, что задача сводится к спаренным интегральным уравнениям. В качестве простейшего примера можно привести пару интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(\lambda) \sin \lambda x d\lambda &= F(x), \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(\lambda) \cos \lambda x d\lambda &= G(x), \end{aligned} \quad (1)$$

первое из которых должно удовлетворяться на некоторой заданной системе интервалов полуоси $x \geq 0$, а второе на остальной части этой полуоси. К этим тригонометрическим спаренным уравнениям сводятся некоторые смешанные краевые задачи теории логарифмического потенциала для полуплоскости, а один из способов их решения использует формулы обращения сингулярных интегралов. Если от полуплоскости перейти к полупространству, то при наличии осевой симметрии мы получим спаренные интегральные уравнения, содержащие цилиндрические функции. Некоторые типы таких спаренных уравнений уже рассмотрены (¹, ²). Двум дальнейшим типам посвящена настоящая заметка. Так как здесь идет речь не о построении какой-либо общей теории, а о конкретных спаренных уравнениях, то наибольший интерес представляет техника решения. Поэтому мы ограничимся в настоящей заметке изложением формальных соотношений, а на анализе условий их применимости не остановимся.

Используемый в наших построениях аппарат целиком принадлежит Н. Я. Сонину и состоит из следующего:

1) разрывный интеграл Сони́на (см. (³), стр. 64 и (⁴), стр. 455)

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} J_{\mu}(bx) x^{\mu+1} \frac{J_{\nu}(a\sqrt{x^2+z^2})}{(Vx^2+z^2)^{\nu}} dx = \\ &= \begin{cases} \frac{b^{\mu}}{a^{\nu}} \left(\frac{V a^2 - b^2}{z} \right)^{\nu-\mu+1} J_{\nu-\mu-1}(z \sqrt{a^2 - b^2}), & a > b > 0 \\ 0, & 0 < a < b, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\nu > \mu > -1$, а z — произвольное комплексное число;

2) формулы обращения Сони́на (см. (3), стр. 151)

$$G(x) = \int_a^x F(t) \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{ik} \right)^{-p} J_{-p}(ik \sqrt{x^2 - t^2}) dt,$$

$$F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x G(t) t \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{k} \right)^{-q} J_{-q}(k \sqrt{x^2 - t^2}) dt,$$

где $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$, а k любое комплексное число (при $k = 0$ написанные формулы переходят в обобщенные формулы Абеля).

2. Рассмотрим спаренные уравнения

$$\int_k^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) \lambda d\lambda = f(x) \quad (0 < x < 1), \quad (2)$$

$$\int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) (\lambda^2 - k^2)^p \lambda d\lambda = 0 \quad (x > 1), \quad (3)$$

где число $k \geq 0$, число p ($0 < p^2 < 1$), а также функция $f(x)$ ($0 < x < 1$) заданы; требуется определить функцию $S(\lambda)$, а вместе с нею и функцию

$$g(x) = \int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) (\lambda^2 - k^2)^p \lambda d\lambda \quad (0 < x < 1). \quad (4)$$

Заметим, что при $k = 0$ эти уравнения уже рассматривались и их формальное решение известно (¹, ²). Отметим также, что мы лишь для простоты взяли в качестве ядра бесселеву функцию нулевого порядка, а не любого порядка $\nu > -1$.

Переходим к решению рассматриваемых уравнений. Прежде всего мы полагаем

$$S(\lambda) = \int_0^1 h(t) (\sqrt{\lambda^2 - k^2})^{-p} J_{-p}(t \sqrt{\lambda^2 - k^2}) dt, \quad (5)$$

где $h(t)$ — новая неизвестная функция. Оправданием для ее введения является то, что функция (5) при любом выборе функции $h(t)$ удовлетворяет уравнению (3), в чем можно убедиться, используя разрывный интеграл Сонина.

Для определения функции $h(t)$ теперь остается подставить выражение (5) в уравнение (2), что можно сделать, если $p > 0$. Если же $p < 0$, то вместо уравнения (2) возьмем вытекающее из него уравнение

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) \xi d\xi = \int_k^\infty S(\lambda) J_1(\lambda x) d\lambda. \quad (2 \text{ bis})$$

Делая эти подстановки и снова используя разрывный интеграл Сонина, находим, что

$$f(x) = \int_0^x h(t) t^{-p} \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{k} \right)^{p-1} J_{p-1}(k \sqrt{x^2 - t^2}) dt,$$

если $p > 0$, и

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x h(t) t^{-p} \left(\frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{k} \right)^p J_p(k \sqrt{x^2 - t^2}) dt,$$

если $p < 0$. Отсюда при помощи формул обращения Сонина получаем следующие выражения для вспомогательной функции $h(t)$:

$$h(t) = t^p \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) x \left(\frac{V t^2 - x^2}{ik} \right)^{-p} J_{-p}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dx,$$

если $p > 0$, и

$$h(t) = t^{1+p} \int_0^t f(x) x \left(\frac{V t^2 - x^2}{ik} \right)^{-1-p} J_{-1-p}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dx,$$

если $p < 0$.

Для определения функции $g(x)$ служит уравнение (4) или вытекающее из (3) и (4) (при помощи формулы обращения Ганкеля) равенство

$$S(\lambda) (\lambda^2 - k^2)^p = \int_0^1 \xi g(\xi) J_0(\lambda \xi) d\xi.$$

Таким путем приходим к формулам:

$$g(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_x^1 h(t) t^p \left(\frac{V t^2 - x^2}{ik} \right)^{-p} J_{-p}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dt,$$

если $p > 0$, и

$$g(x) = \int_x^1 h(t) t^p \left(\frac{V t^2 - x^2}{ik} \right)^{-1-p} J_{-1-p}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dt,$$

если $p < 0$.

3. Аналогичный метод позволяет решить следующие спаренные интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} \int_k^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda x) d\lambda &= f(x) \quad (0 < x < 1), \\ \int_0^\infty C(\lambda) J_{-\nu}(\lambda x) d\lambda &= 0 \quad (x > 1), \end{aligned} \tag{6}$$

где число $k \geq 0$, число ν ($0 < \nu^2 < 1$) и функция $f(x)$ ($0 < x < 1$) заданы, а ищется функция $C(\lambda)$ и вместе с ней функция

$$g(x) = \int_0^\infty C(\lambda) J_{-\nu}(\lambda x) d\lambda \quad (\nu < x < 1).$$

Заметим, что система (6) при $\nu = 1/2$ принимает вид

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_k^\infty C(\lambda) \sin \lambda x \frac{d\lambda}{V\lambda} = \sqrt{x} f(x) \quad (0 < x < 1),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\lambda) \cos \lambda x \frac{d\lambda}{V\lambda} = 0 \quad (x > 1)$$

и, если $k > 0$, не является частным случаем системы (1).

Решение уравнений (6) при $\nu > 0$ дается формулами

$$C(\lambda) = \lambda^{1-\nu} \int_0^1 h(t) J_0(t \sqrt{\lambda^2 - k^2}) dt,$$

$$g(x) = x^{-\nu} \int_x^1 h(t) \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik} \right)^{\nu-1} J_{\nu-1}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dt,$$

где вспомогательная функция $h(t)$ определяется равенством

$$h(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) x^{1+\nu} \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik} \right)^{-\nu} J_{-\nu}(ik \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

На случае $\nu < 0$ мы не остановимся, так как он сводится к уже рассмотренному, если предварительно систему (6) заменить на

$$\int_k^\infty C(\lambda) J_{1+\nu}(\lambda x) \lambda d\lambda = -x^\nu \frac{d}{dx} [x^{-\nu} f(x)] \quad (0 < x < 1),$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_{-1-\nu}(\lambda x) \lambda d\lambda = 0 \quad (x > 1).$$

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
21 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., 1948.
² С. J. Tranter, Quart. J. Math., Oxford, ser. (2), 2 (1951). ³ Н. Я. Сонин, Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М.—Л., 1954.
⁴ Г. Н. Ватсон, Теория бesselевых функций, ИЛ, 1949.