

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

## КОЛЬЦА С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ИДЕАЛОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1954)

В настоящей заметке доказывается теорема, что всякое кольцо с условием минимальности для идеалов\* представимо единственным образом в виде прямой суммы  $\mathfrak{A} = E + E^0$ , где  $E$  — полупростое кольцо в смысле Брауна — Маккоя<sup>(3)</sup>, а  $E^0$  — кольцо, ограниченное своим радикалом в смысле М. Холла<sup>(6)</sup>.

Как известно (см. <sup>(8,1)</sup>), идеал  $I$  в кольце  $\mathfrak{A}$  называется отмеченным идеалом, если в  $\mathfrak{A}$  существует единица по модулю  $I$ , т. е. если фактор-кольцо  $\mathfrak{A}/I$  имеет единицу. Если  $a$  — произвольный элемент кольца  $\mathfrak{A}$ , то через  $F(a)$  будем обозначать отмеченный идеал  $\{ax - x + ya - y + \sum x_i a y_i - \sum x_i y_i\}$ , где  $x, y, x_i, y_i$  пробегает кольцо  $\mathfrak{A}$ . Радикал кольца, в смысле Брауна — Маккоя<sup>(3)</sup>, будет обозначаться через  $N$ . Кольцо  $\mathfrak{A}$  является присоединенно-простым, т. е.  $\mathfrak{A} = N$ , тогда и только тогда, если  $F(a) = \mathfrak{A}$  для любого  $a \in \mathfrak{A}$ , или, что то же самое, если  $\mathfrak{A}$  не допускает нетривиальных гомоморфных отображений на кольца с единицей (см. <sup>(7,2)</sup>). Если кольцо  $\mathfrak{A}$  не присоединенно-простое, то  $\mathfrak{A}$  содержит максимальные отмеченные идеалы и радикал  $N$  есть пересечение всех максимальных отмеченных идеалов  $M_\alpha$  (см. <sup>(3,2)</sup>). Как обычно, кольцо  $\mathfrak{A}$  называется полупростым, если  $N = 0$ . Фактор-кольцо  $\mathfrak{A}/N$  является полупростым и всякое полупростое кольцо изоморфно подпрямой сумме простых колец с единицей.

§ 1. Лемма 1. *В произвольном кольце  $\mathfrak{A}$  пересечение конечного числа отмеченных идеалов есть отмеченный идеал.*

Теорема 1. *Полупростое кольцо с условием минимальности для отмеченных идеалов является конечной прямой суммой простых колец с единицей.*

Если некоторое кольцо  $\mathfrak{A}$  есть конечная прямая сумма простых колец с единицей, то всякий идеал  $A$  в таком кольце обладает единицей. Имеет место и обратное утверждение, т. е. справедлива

Теорема 2. *Если в кольце  $\mathfrak{A}$  всякий идеал, рассматриваемый как кольцо, обладает единицей, то такое кольцо  $\mathfrak{A}$  есть конечная прямая сумма простых колец с единицей\*\*.*

Доказательство теоремы 2 опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Если в произвольном кольце  $\mathfrak{A}$  идеал  $A_1$  обладает единицей и содержится в некотором идеале  $A$ , то существует такой идеал  $A_2$  кольца  $\mathfrak{A}$ , содержащийся в  $A$ , что  $A = A_1 + A_2$ .*

Доказательство теоремы 2. Пусть  $M_1$  — максимальный идеал в  $\mathfrak{A}$ . Такой идеал существует, так как кольцо  $\mathfrak{A}$  содержит единицу.

\* Здесь и всюду ниже под идеалом следует понимать двусторонний идеал.

\*\* Аналогичная теорема для колец, в которых всякий левый идеал содержит правую единицу, доказана в работе<sup>(5)</sup>.

Применяя лемму 2 к идеалам  $M_1$  и  $\mathfrak{A}$ , получаем  $\mathfrak{A} = A_1 \dot{+} M_1$ , где  $A_1 \cong \mathfrak{A}/M_1$  — простое кольцо с единицей. Если  $M_1 \neq 0$ , то пусть  $M_2$  — максимальный идеал в  $M_1$ . Применяя ту же лемму к идеалам  $M_1$  и  $M_2$ , получаем  $M_1 = A_2 \dot{+} M_2$  и, следовательно,  $\mathfrak{A} = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} M_2$ . Покажем, что существует такое  $n$ , для которого  $M_n = 0$ . Действительно, в противном случае бесконечная прямая сумма  $\mathfrak{A}' = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots$  была бы идеалом в  $\mathfrak{A}$ , не содержащем единицу, что противоречит предположению о кольце  $\mathfrak{A}$ .

§ 2. Определение 1. Кольцо  $\mathfrak{A}$  будем называть  $\alpha$ -кольцом, если пересечение всех отмеченных идеалов, отличных от  $\mathfrak{A}$ , не является отмеченным идеалом.

Присоединенно-простое кольцо можно считать  $\alpha$ -кольцом, так как такое кольцо не содержит отмеченных идеалов, отличных от самого  $\mathfrak{A}$ . Полупростое кольцо без единицы тоже будет  $\alpha$ -кольцом, так как в таком кольце идеал  $N = 0 = \bigcap M_\alpha$  не является отмеченным идеалом.

Теорема 3. *Кольцо  $\mathfrak{A}$  с условием минимальности для отмеченных идеалов будет  $\alpha$ -кольцом тогда и только тогда, если оно присоединенно-простое.*

Комбинируя теорему 3 с теоремой о том, что присоединенно-простое кольцо с условием минимальности для правых идеалов нильпотентно (см. <sup>(3, 2)</sup>), получаем теорему:

Теорема 4.  *$\alpha$ -Кольцо с условием минимальности для правых идеалов нильпотентно.*

§ 3. Под аннулятором  $A^0$  некоторого идеала  $A$  мы будем понимать, как обычно, идеал, состоящий из всех таких элементов  $a$  кольца  $\mathfrak{A}$ , что  $aA = Aa = 0$ . Следуя М. Холлу <sup>(6)</sup>, мы будем говорить, что кольцо  $\mathfrak{A}$  ограничено своим радикалом, если аннулятор радикала содержится в самом радикале, т. е.  $N^0 \subseteq N$ .

Лемма 3. *В произвольном кольце  $\mathfrak{A}$  всякий ненулевой минимальный идеал  $A$  (если такой существует) является либо присоединенно-простым кольцом, либо простым кольцом с единицей.*

Действительно, пусть  $A$  не присоединенно-простое кольцо. Тогда найдется такой элемент  $e$  в  $A$ , что идеал кольца  $\mathfrak{A}$   $F(e) = \{ex - x + ye - y + \sum x_i e u_i - \sum x_i u_i\}$ , где  $x, y, x_i, u_i$  пробегает идеал  $A$ , не совпадает с  $A$ . Так как  $F(e) \subseteq A$  и  $A$  минимальный, то  $F(e) = 0$ . Следовательно,  $ex - x = 0$ ,  $ye - y = 0$  для любых  $x, y \in A$ , т. е.  $e$  является единицей кольца  $A$ . В силу леммы 2 идеал  $A$  будет прямым слагаемым в кольце  $\mathfrak{A}$ , а потому всякий идеал в  $A$  будет идеалом и в кольце  $\mathfrak{A}$ , т. е.  $A$  есть простое кольцо с единицей, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Если кольцо  $\mathfrak{A}$  ограничено своим радикалом, то всякий минимальный идеал  $A$  является присоединенно-простым кольцом.*

Если  $A = 0$ , то все доказано. Предположим теперь, что  $A \neq 0$  является простым кольцом с единицей. Тогда, в силу известного свойства радикала <sup>(4)</sup>,  $N \cap A = N(A) = 0$ . Следовательно,  $AN = NA = 0$ , т. е.  $A \subseteq N^0$ . Отсюда, в силу предположения леммы, получаем  $A = A \cap N^0 \subseteq A \cap N = 0$ . Из полученного противоречия и леммы 3 следует, что  $A$  есть присоединенно-простое кольцо.

Обратное утверждение к лемме 4, вообще говоря, неверно, как показывает пример кольца целых чисел. Однако для колец с условием минимальности для отмеченных идеалов справедлива

Теорема 5. *Кольцо  $\mathfrak{A}$  с условием минимальности для отмеченных идеалов будет ограничено своим радикалом тогда и только тогда, когда всякий минимальный идеал является присоединенно-простым кольцом.*

Доказательство. В силу леммы 4 нужно доказать только достаточность условия теоремы. Покажем сперва, что  $N \cap (N^0)^2 = 0$ . Пусть  $r \in N \cap (N^0)^2$ , т. е.  $r \in N$  и

$$r = \sum_{i=1}^n s_i t_i, \quad (1)$$

где  $s_i, t_i \in N^0$ . Ввиду теоремы 1, фактор-кольцо  $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/N$  есть конечная прямая сумма простых колец с единицей. Следовательно, идеал  $(\bar{t}_i)$  обладает единицей  $e_i$ , т. е.

$$t_i = t_i e_i + r_i, \quad (2)$$

где  $r_i \in N$ , а  $t_i, e_i \in (t_i) \subseteq N^0$ . Подставляя значения  $t_i$  из равенств (2) в (1), получаем

$$r = \sum_{i=1}^n s_i (t_i e_i + r_i) = \sum_{i=1}^n s_i t_i e_i, \quad (3)$$

так как  $s_i r_i \in N^0 \cdot N = 0$ . Если  $n = 1$ , то из равенств (1) и (3) следует  $r = s_1 t_1 = s_1 t_1 e_1 = r e_1 = 0$ , так как  $r \in N$ ,  $e_1 \in N^0$ . Предположим теперь,

что наше утверждение верно для  $n-1$ , т. е. из равенства  $r = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i$ , где  $u_i \in N^0$ ,  $v_i \in N^0$ , следует  $r = 0$ . Покажем, что оно остается справедливым и для  $n$ . Если  $n > 1$ , то из равенства (1) находим  $s_n t_n = r - \sum_{i=1}^{n-1} s_i t_i$ . Подставляя последнее выражение для  $s_n t_n$  в (3), получаем

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{n-1} s_i t_i e_i + \left( r - \sum_{i=1}^{n-1} s_i t_i \right) e_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i t_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} s_i t_i e_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} s_i t_i (e_i - e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i, \end{aligned}$$

где  $u_i = s_i t_i \in N^0$ ,  $v_i = e_i - e_n \in N^0$ . В силу индуктивного предположения  $r = 0$ , т. е.  $N \cap (N^0)^2 = 0$ . Применяя теперь вторую теорему об изоморфизмах, получаем  $\frac{(N^0)^2}{(N^0)^2 \cap N} \cong \frac{(N^0)^2 + N}{N}$ , т. е.  $(N^0)^2 \cong \frac{(N^0)^2 + N}{N}$ . Следовательно, идеал  $(N^0)^2$  является конечной прямой суммой простых колец с единицей, которые, как легко заметить, будут минимальными идеалами с единицей в кольце  $\mathfrak{A}$ . Так как по условию теоремы всякий минимальный идеал в кольце  $\mathfrak{A}$  является присоединенно-простым кольцом, то  $(N^0)^2 = 0$ . Но радикал  $N$  содержит все нильпотентные идеалы кольца  $\mathfrak{A}$  (см. (3)). Следовательно,  $N^0 \subseteq N$ , чем и заканчивается доказательство теоремы.

**Теорема 6.** *Всякое кольцо  $\mathfrak{A}$  с условием минимальности для идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы  $\mathfrak{A} = E \dot{+} E^0$ , где  $E$  — полупростое кольцо, а  $E^0$  ограничено своим радикалом.*

Доказательство. В силу условия минимальности кольцо  $\mathfrak{A} \neq 0$  содержит ненулевые минимальные идеалы. Если всякий минимальный идеал является присоединенно-простым кольцом, то, ввиду теоремы 5,  $\mathfrak{A}$  ограничено своим радикалом и все доказано;  $E = 0$ ,  $E^0 = \mathfrak{A}$ .

Пусть теперь кольцо  $\mathfrak{A}$  содержит минимальный идеал с единицей  $A_1$ . Применяя к идеалам  $A_1$  и  $\mathfrak{A}$  лемму 2, получаем разложение  $\mathfrak{A} = A_1 \dot{+} \mathfrak{A}_1$ . Если в кольце  $\mathfrak{A}_1$  всякий минимальный идеал является присоединенно-простым кольцом, то  $\mathfrak{A}_1$  ограничено своим радикалом, и требуемое

разложение получено. Пусть  $A_2$  — минимальный идеал с единицей в  $\mathfrak{U}_1$  и, следовательно, в  $\mathfrak{U}$ . Тогда  $\mathfrak{U}_1 = A_2 + \mathfrak{U}_2$  и  $\mathfrak{U} = A_1 + A_2 + \mathfrak{U}_2$ . Этот процесс выделения минимальных идеалов с единицей должен закончиться через конечное число шагов, так как в противном случае мы получили бы бесконечную убывающую цепочку идеалов  $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \dots$ , что противоречит условию минимальности. Следовательно, существует такое целое  $n$ , что  $\mathfrak{U} = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \mathfrak{U}_n$ , т. е.

$$\mathfrak{U} = E + E^0, \quad (4)$$

где  $E = A_1 + A_2 + \dots + A_n$  — полупростое, а  $E^0 = \mathfrak{U}_n$ , в силу теоремы 5, ограничено своим радикалом.

Докажем теперь единственность разложения (4). Пусть

$$\mathfrak{U} = F + F^0 \quad (5)$$

второе разложение кольца  $\mathfrak{U}$  в прямую сумму полупростого и ограниченного своим радикалом колец. Так как разложения (4) и (5) суть пирсовские разложения кольца  $\mathfrak{U}$  по единицам  $e$  и  $f$  идеалов  $E$  и  $F$ , то для доказательства единственности разложения (4) достаточно установить равенство  $e = f$ . Заметим сперва, что  $N \subseteq E^0$  и  $N \subseteq F^0$ . Действительно, как известно <sup>(3)</sup>, при любом гомоморфном отображении кольца  $\mathfrak{U}$  на некоторое кольцо  $\mathfrak{U}'$  радикал  $N(\mathfrak{U})$  отображается в радикал  $N(\mathfrak{U}')$ . Так как  $\mathfrak{U}/E^0$  и  $\mathfrak{U}/F^0$  — полупростые кольца, то  $N \subseteq E^0$  и  $N \subseteq F^0$ . Из последних включений и известного свойства радикала  $N$  <sup>(4)</sup> получаем  $N(E^0) = E^0 \cap N(\mathfrak{U}) = N(\mathfrak{U})$ ,  $N(F^0) = F^0 \cap N(\mathfrak{U}) = N(\mathfrak{U})$ . Отсюда и из равенств  $eE^0 = E^0e = 0$  следует  $eN = Ne = 0$ . Пусть теперь в разложении (5) единица  $e$  имеет запись

$$e = f_1 + f_2, \quad (6)$$

где  $f_1 \in F$ ,  $f_2 \in F^0$ . Из равенства (6) и соотношений  $eN = Ne = 0$ ,  $f_1N = Nf_1 = 0$  получаем  $f_2N = Nf_2 = 0$ , т. е.  $f_2 \in N^0_{F^0}$ , где  $N^0_{F^0}$  — аннулятор радикала  $N$  в кольце  $F^0$ . Отсюда, ввиду ограниченности кольца  $F^0$  своим радикалом, получаем  $f_2 \in N$ . Далее, из очевидных равенств  $e = e^2 = (f_1 + f_2)^2 = f_1^2 + f_2^2 = f_1 + f_2$  следует  $f_2^2 = f_2$ . С другой стороны,  $f_2^2 \in N^0_{F^0} \cdot N = 0$ , а потому  $f_2 = 0$ . Отсюда и из равенства (6) получаем  $e = f_1 = ff_1 = f_1f = ef = fe$ . Аналогично доказываются равенства  $f = ef = fe$ . Следовательно,  $e = f$ , что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что теорема 6 обобщает аналогичную теорему М. Холла <sup>(6)</sup> о том, что всякое кольцо с условием минимальности для правых идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы полупростого (в классическом смысле) и ограниченного своим радикалом колец. Действительно, в кольце  $\mathfrak{U}$  с условием минимальности для правых идеалов радикал  $N$  совпадает с классическим радикалом <sup>(3)</sup>.

Московский химико-технологический институт  
им. Д. И. Менделеева

Поступило  
26 V 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 129 (1948).  
<sup>2</sup> В. А. Андрунакиевич, там же, 16, 217 (1952). <sup>3</sup> В. Brown, N. H. McCoy, Am. J. Math., 69, 46 (1947). <sup>4</sup> В. Brown, N. H. McCoy, Duke Math. J., 15, 495 (1948). <sup>5</sup> L. Fuchs, T. Szele, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 3, 233 (1952).  
<sup>6</sup> M. Hall, Trans. Am. Math. Soc., 48, 391 (1940). <sup>7</sup> В. М. Курочкин, ДАН, 66, № 8, 549 (1949). <sup>8</sup> Е. Г. Шильгейфер, ДАН, 64, № 5, 633 (1949).