

С. И. АЛЬБЕР

ГОМОЛОГИИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 VI 1954)

В настоящей заметке развивается рекуррентный метод, предложенный в (1)*. Этим методом можно исследовать гомологии различных однородных пространств как с компактными, так и с некомпактными группами преобразований (2), и, в частности, более простым путем получить результаты Эресмана (3,4), Бореля (5) и других авторов.

Из-за краткости сообщения мы ограничимся здесь случаем многообразия $G(n, k)$ неориентированных $(k+1)$ -мерных плоскостей $(n+1)$ -мерного вещественного евклидова пространства, проходящих через начало координат, и псевдомногообразия $C_0(n, k)$ k -мерных сфер и плоскостей n -мерного конформного пространства K^n , причем все одноточечные сферы отождествляются. (Через K^n обозначается евклидово пространство, замкнутое одной бесконечно удаленной точкой.)

Базисные циклы групп Бетти по модулю два многообразия были найдены Эресманом методом клеточного разбиения (4). Там же были вычислены коэффициенты инцидентий и была найдена полная, но не минимальная система образующих целочисленных групп. Главная трудность состоит в нахождении независимой системы образующих. Мы будем пользоваться обозначениями (6).

1. Каждая плоскость пересекается с единичной сферой S^n по k -мерной большой сфере; отсюда следует, что $G(n, k)$ гомеоморфно многообразию неориентированных больших k -мерных сфер сферы S^n или многообразию k -мерных сфер и плоскостей K^n , пересекающих единичную сферу S^{n-1} в диаметрально противоположных точках, в чем легко убедиться, отображая S^n на конформное пространство K^n . Плоскости, принадлежащие $G(n, k)$, проходят через начало координат, а поэтому образуют подмногообразие, гомеоморфное $G(n-1, k-1)$. С другой стороны, все k -мерные сферы многообразия, лежащие на единичной сфере S^{n-1} , составляют подмногообразие $G(n-1, k)$ k -мерных больших сфер сферы S^{n-1} .

Определим деформацию $D_t (0 \leq t \leq 1)$, при которой каждая сфера деформируется в своей плоскости так, что точки пересечения ее с S^{n-1} остаются неподвижными, а радиус в момент t становится равным $R(1-t) + t$. Тогда

$$D_1(G(n, k) \setminus G(n-1, k-1)) = G(n-1, k). \quad (1)$$

Предположим, что гомологии $G(n-1, k-1)$ и $G(n-1, k)$ известны. Построим циклы, имеющие с циклами подмногообразия плоско-

* Для исследования групп гомологий ориентируемых компактных римановых многообразий рекуррентный метод, основанный на деформациях по ортогональным траекториям специально определенных функций, был предложен Л. С. Понтрягиным в 1939—1942 гг. Этим методом были впервые исследованы гомологии компактных групп Ли.

стей $G(n-1, k-1)$ ненулевое пересечение. Если же цикл имеет с циклами $G(n-1, k-1)$ нулевое пересечение, то этот цикл, по теореме Л. С. Понтрягина о снятии цикла, можно снять с $G(n-1, k-1)$ и при помощи D_t деформировать в $G(n-1, k)$. Исследование значительно усложняется в случае целочисленных групп.

2. В этом пункте рассматриваются гомологии по модулю два.

Вложение многообразия $G(n-1, k)$ в многообразие $G(n, k)$ определяет гомоморфизм вложения φ групп Бетти $\Delta_2^s[G(n-1, k)]$ в группы Бетти $\Delta_2^s[G(n, k)]$. Обозначим через $[a_0, \dots, a_{k-1}, n]$ псевдомногообразие k -мерных сфер и плоскостей пространства K^n , пересекающих единичную сферу S^{n-1} по сферам, являющимся точками цикла $[a_0, \dots, a_{k-1}]$.

Теорема 1. Циклы $[a_0, \dots, a_{k-1}, n]$ ($0 \leq a_0 < \dots < a_{k-1} < n$) образуют полную независимую систему образующих циклов групп $\Delta_2^s[G(n, k)] / \varphi(\Delta_2^s[G(n-1, k)])$.

Теорема 2. Гомоморфизм вложения $\Delta_2^s[G(n-1, k)]$ в $\Delta_2^s[G(n, k)]$ есть изоморфизм.

Теорема 3. Циклы $[a_0, \dots, a_k]$ ($0 \leq a_0 < \dots < a_k \leq n$) образуют полную базисную систему циклов групп $\Delta_2^s[G(n, k)]$.

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству соответствующих теорем (¹). Теорема 3 является простым следствием теорем 1 и 2.

Из этих теорем следует рекуррентная формула для чисел Бетти по модулю два многообразия $G(n, k)$:

$$\pi_2^s[G(n, k)] = \pi_2^s[G(n-1, k)] + \pi_2^{s-n+k}[G(n-1, k-1)]. \quad (2)$$

3. Теорема 4. Многообразие $G(n, k)$ ориентируемо при n нечетном и неориентируемо при n четном.

Действительно, можно показать, что подмногообразие k -мерных сфер, у которых центр не лежит на луче $x_n \geq 0$, $x_i = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), гомеоморфно $E^n \times G(n-2, k-1)$. Поэтому равны следующие целочисленные границы:

$$\Delta G(n, k) = \Delta[E^n \times G(n-2, k-1)]. \quad (3)$$

Основная теорема. Полная независимая система свободных образующих целочисленных групп Бетти $\Delta_0^s[G(n, k)]$ состоит из циклов:

а) при k нечетном

$$[2l, 2l+1, \dots, 2m, 2m+1]; \quad (4)$$

б) при k четном, но n нечетном:

$$[2l-1, 2l, \dots, 2m-1, 2m, n], \quad (5)$$

$$[0, 2l-1, 2l, \dots, 2m-1, 2m]; \quad (6)$$

с) при k четном и n четном:

$$[0, 2l-1, 2l, \dots, 2m-1, 2m]. \quad (7)$$

Полная независимая система образующих групп кручения $\Theta^s[G(n, k)]$ состоит из циклов:

а) при k нечетном:

$$\frac{1}{2} \Delta[a_0, \dots, a_{i-1}, 2b+1, 2c, 2c+1, \dots, 2d, 2d+1, a_{k-i}, \dots, a_k], \quad (8)$$

где $0 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$ и $a_{i-1} < a_i - 1$;

б) при k четном:

$$\frac{1}{2} \Delta[a_0, \dots, a_i, 2b-1, 2b, \dots, 2c-1, 2c, 2d, a_{k-i}, \dots, a_k], \quad (9)$$

где $0 \leq i+1 \leq k/2$ и $a_i < a_{i+1} - 1$ при $i = k/2 - 1$.

Все кручения второго порядка.

Заметим, что при $k=0$ формулы (5), (6), (7), (9) описывают группы Бетти проективного пространства P^n .

Так как $G(n, k)$ неориентируемо при четном n , то, чтобы было возможно применять теорему о снятии цикла Л. С. Понтрягина, мы изучим гомоморфизм вложения групп Бетти $\Delta_0^s[G(2p-1, k)]$ и $\Delta_0^s[G(2p, k)]$ в $\Delta_0^s[G(2p+1, k)]$. Для этого исследуются пересечения целочисленных циклов системы (4)–(9) с циклами по группе коэффициентов Π ((⁶), стр. 260) псевдомногообразия L -подкомплекса $G(2p+1, k)$, состоящего из сфер и плоскостей, пересекающих прямую $x_1 = \dots = x_{2p} = 0$.

L можно представить в виде следующей модели. Многообразие $G(2p, k-1)$ $(k-1)$ -мерных больших сфер, лежащих на $2p$ -мерной сфере $\xi_1^2 + \dots + \xi_{2p+1}^2 = 1$, топологически умножается на отрезок $[0, \pi]$.

Пусть $S_0^{k-1} \in G_0(2p, k-1)$, $S_\pi^{k-1} \in G_\pi(2p, k-1)$ и существует гомеоморфизм сферы S_0^{k-1} на S_π^{k-1} , выражающийся в координатах равенствами: $\xi'_1 = -\xi_1$, $\xi'_i = \xi_i$ ($i = 2, \dots, 2p+1$); при этих условиях сферы S_0^{k-1} и S_π^{k-1} отождествляются. Затем все точки (S^{k-1}, t) ($0 \leq t \leq \pi$), где S^{k-1} есть точка подмногообразия $G(2p-1, k-1)$, отождествляются в одну точку $\bar{S}^{k-1}$. Гомологии L легко выражаются через гомологии $G(2p, k-1)$.

Теорема 5. Гомоморфизм вложения $\Delta_0^s[G(n, 2r+1)]$ в $\Delta_0^s[G(n+1, 2r+1)]$ и $\Delta_0^s[G(2p, 2r)]$ в $\Delta_0^s[G(2p+1, 2r)]$ есть изоморфизм.

Пусть $\Delta_0^s[G(2p-1, 2r)] = A \dot{+} B$, где A имеет своими образующими циклы (5). Тогда (см. (⁶), приложение 1, арт. 4:5, замечание 2) при гомоморфизме вложения $\varphi: \Delta_0^s[G(p-1, 2r)] \rightarrow \Delta_0^s[G(2p, 2r)]$ $\varphi(A) \approx (A)_2$, $\varphi(B)$ есть изоморфизм.

4. Пусть $C(n, k)$ — пространство k -мерных сфер, лежащих на n -мерной сфере $x_1^2 + \dots + x_{n+2}^2 = 1$, $x_{n+2} = 1/2$ $(n+2)$ -мерного евклидова пространства. Если через каждую сферу $C(n, k)$ и начало координат провести $(k+2)$ -мерную плоскость, то тем самым будет построен гомеоморфизм $C(n, k)$ в $G(n+1, k+1)$. Поэтому псевдомногообразие $C_0(n, k)$, получаемое из $C(n, k)$ отождествлением одноточечных сфер, гомеоморфно псевдомногообразию, получаемому из $G(n+1, k+1)$ отождествлением подмногообразия $G(n, k+1)$ в точку. В качестве модели $C_0(n, k)$ можно также взять псевдомногообразие $(k+1)$ -мерных сфер и плоскостей $(n+1)$ -мерного евклидова пространства, проходящих через начало координат.

Таким образом, вычисление гомологий в $C_0(n, k)$ сводится к вычислению гомологий в $G(n+1, k+1)$.

Пусть $S(\varepsilon)$ — множество сфер псевдомногообразия $C_0(n, k)$, у которых радиус $< \varepsilon$.

Обозначим через $\Omega_0^s[G(n, k+1)]$ образ $\Delta_0^s[G(n, k+1)]$ при гомоморфизме вложения $\Delta_0^s[G(n, k+1)]$ в $\Delta_0^s[G(n+1, k+1)]$ и через $H_2[C_0(n, k, \varepsilon)]$ — кольцо пересечений многообразия $C_0(n, k, \varepsilon) = C_0(n, k) \setminus S(\varepsilon)$.

Теорема 6. $H_2[C_0(n, k, \varepsilon)]$ изоморфно $H_2[G(n, k)]$. $H_2[G(n, k)]$ вычислено Черном (⁷).

Теорема 7. Группа Бетти $\Delta_0^s [C_0(n, k)]$ изоморфна группе $\Delta_0^s [G(n+1, k+1)] / \Omega_0^s [G(n, k+1)]$ при четном k и при нечетном k , если n четно.

Группа Бетти $\Delta_0^s [C_0(2p-1, 2r-1)]$ изоморфна прямой сумме группы $\Delta_0^s [G(2p, 2r)] / \Omega_0^s [G(2p-1, 2r)]$ и свободной группы, образующей которой получаются из цепей $[2l-1, 2l, \dots, 2m-1, 2m, 2p]$ отождествлением всех точек $[2l-1, 2l, \dots, 2m-1, 2m, 2p-1]$ в одну точку.

Аналогичная теорема справедлива для псевдомногообразия $D_0(n, k)$ ориентированных сфер. Его группы Бетти содержат подгруппы, изоморфные $\Delta_0^s [H(n+1, k+1)] / \Omega_0^s [H(n, k+1)]$, где $H(n, k)$ — многообразие ориентированных больших k -мерных сфер сферы S^n . Имеем $H(n, k) \subset D_0(n, k)$.

Теорема 8. Группы кручения $\Theta^{p-1} [D_0(n, k)]$ и $\Theta^q [H(n, k)]$ изоморфны, а числа Бетти $\pi^p [D_0(n, k)]$ и $\pi^q [H(n, k)]$ равны.

Томский инженерно-строительный
институт

Поступило
5 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. И. Альбер, ДАН, **91**, 6 (1953). ² Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, 1949. ³ С. Ehresmann, Ann. Math., **35**, 2 (1934). ⁴ С. Ehresmann, J. de Math. pures et appl., **16** (1937). ⁵ A. Borel, Ann. Math., **57**, 1 (1953). ⁶ П. С. Александров, Комбинаторная топология, М., 1947. ⁷ С. С. Chern, Ann. Math., **49**, 2 (1948).