

А. М. ЯГЛОМ

ЭФФЕКТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ n -МИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 VI 1954)

1. Пусть $\xi(t')$ — процесс со случайными стационарными n -ми приращениями ⁽¹⁾, имеющий спектральную плотность $F'(\lambda) = f(\lambda)$ и такой, что $M \Delta_{\tau}^{(n)} \xi(t') \equiv 0$. Линейное экстраполирование $\xi(t')$ с полупрямой $t' \leq t$ на время s вперед заключается в нахождении линейного функционала $\tilde{\xi}(t+s)$ от значений $\xi(t')$, $t' \leq t$, такого, что $\xi(t+s) - \tilde{\xi}(t+s)$ принадлежит линейному замыканию (в среднем квадратичном) совокупности случайных величин $\Delta_{\tau}^{(n)} \xi(t')$, $-\infty < t', \tau < \infty$ и

$$\sigma^2(s) = M |\xi(t+s) - \tilde{\xi}(t+s)|^2 \quad (1)$$

принимает наименьшее значение (см. ⁽²⁾).

Пусть

$$f(\lambda) = \frac{C |\lambda|^{2(n-\alpha)}}{1 + \lambda^{2n}}, \quad C > 0, \quad 1/2 < \alpha < n + 1/2. \quad (2)$$

Как указывалось в ⁽²⁾, здесь достаточно рассмотреть случаи $n=1$, $1/2 < \alpha < 3/2$ и $n=2$, $\alpha = 3/2$.

Теорема 1. Если $\xi(t')$ — процесс со случайными стационарными первыми приращениями, имеющий спектральную плотность ⁽²⁾, то решение задачи об экстраполировании $\xi(t')$ дается формулами

$$\tilde{\xi}(t+s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} s^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\xi(t-p)}{p^{\alpha} (p+s)} dp \quad \text{при } 1/2 < \alpha < 1; \quad (3)$$

$$\tilde{\xi}(t+s) = \xi(t) \quad \text{при } \alpha = 1; \quad (4)$$

$$\tilde{\xi}(t+s) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} s^{\alpha-1} \int_0^{\infty} \frac{(p+s) \xi(t) - s \xi(t-p)}{p^{\alpha} (p+s)} dp \quad \text{при } 1 < \alpha < 3/2. \quad (5)$$

Формула (5) с $\alpha = 3/2$ определяет $\tilde{\xi}(t+s)$ и для процесса $\xi(t')$ со случайными стационарными вторыми приращениями, имеющего спектральную плотность ⁽²⁾ с $\alpha = 3/2$.

Заметим еще, что

$$\sigma^2(s) = \frac{2\pi C}{(2\alpha-1) \Gamma^2(\alpha)} s^{2\alpha-1}, \quad 1/2 < \alpha \leq 3/2, \quad (6)$$

в частности, $\sigma^2(s) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(3-2\alpha)} M |\xi(t+s) - \xi(t)|^2$ при $n=1$.

2. Пусть $f(\lambda)$ рациональна и всюду положительна:

$$f(\lambda) = \frac{C |(\lambda - \beta_1) \dots (\lambda - \beta_M)|^2}{(1 + \lambda^{2n}) |(\lambda - \alpha_1) \dots (\lambda - \alpha_N)|^2} = \frac{C |B(\lambda)|^2}{(1 + \lambda^{2n}) |A(\lambda)|^2}, \quad (7)$$

где $C > 0$, $M < N + n$ и $\operatorname{Im} \alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, N$; $\operatorname{Im} \beta_l > 0$, $l = 1, \dots, M$.

Теорема 2. Для процесса $\xi(t')$ со случайными стационарными n -ми приращениями, имеющего спектральную плотность (7), $\xi(t + s)$ дается формулой

$$\tilde{\xi}(t + s) = \sum_{k=0}^{N+n-M-1} W_k \xi^{(k)}(t) + \int_0^{\infty} w(p) \xi(t - p) dp, \quad (8)$$

где постоянные W_k и функция $w(p)$ определяются из условия

$$\sum_{k=0}^{N+n-M-1} W_k (i\lambda)^k + \int_0^{\infty} e^{-ip\lambda} w(p) dp = \frac{P(\lambda)}{B(\lambda)}, \quad (9)$$

в котором $P(\lambda)$ означает многочлен $(N + n - 1)$ -й степени такой, что отношение $[P(\lambda) - e^{i\lambda} B(\lambda)] / \lambda^n A(\lambda)$ является целой функцией λ .

Теорема 2 сводит нахождение $\tilde{\xi}(t + s)$ к решению системы линейных уравнений $(N + n)$ -го порядка; для $n = 0$ этот результат содержится в (3-5).

3. Линейная фильтрация $\xi(t')$, заданного при $t' \leq t$, заключается в нахождении линейного функционала $\tilde{\Xi}$ относительно величин $\Delta_{\tau}^{(n)} \xi(t')$, $t' \leq t$, $\tau > 0$, для которого

$$\sigma_{\Xi}^2 = \mathbf{M} |\Xi - \tilde{\Xi}|^2, \quad (10)$$

где Ξ — фиксированная случайная величина с $\mathbf{M} \Xi = 0$, принимает наименьшее значение. При этом основную роль играет функция $D_{\Xi \xi}^{(n)}(t; \tau) = \mathbf{M} \Xi \overline{\Delta_{\tau}^{(n)} \xi(t)}$, которую в силу формулы (13) статьи (1) можно представить в виде

$$D_{\Xi \xi}^{(n)}(t; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \tau} (1 - e^{i\tau \lambda})^n \frac{\lambda^n + i}{\lambda^n} f_{\Xi}(\lambda) dF(\lambda), \quad (11)$$

где $f_{\Xi}(\lambda)$ — комплексная функция с интегрируемым по $dF(\lambda)$ квадратом модуля, однозначно восстанавливаемая по $D_{\Xi \xi}^{(n)}(t; \tau)$. Требуется по данным $f(\lambda)$ и $f_{\Xi}(\lambda)$ найти $\tilde{\Xi}$; для нахождения σ_{Ξ}^2 надо еще знать величину $D_{\Xi}^2 = \mathbf{M} |\Xi|^2$.

Пусть $f(\lambda)$ дается формулой (7) и

$$\begin{aligned} f_{\Xi}(\lambda) &= e^{i\lambda \tau} \frac{\sum_{j=1}^{K_1} q_j(\lambda) e^{-i\tau_j \lambda} + \sum_{j=1}^{K_2} q_j^{(1)}(\lambda) e^{-i\tau_j' \lambda}}{[(\lambda - \gamma_1) \dots (\lambda - \gamma_{L_1})] \cdot [(\lambda - \gamma_1') \dots (\lambda - \gamma_{L_2}')]} = \\ &= e^{i\lambda \tau} \frac{Q(\lambda) + Q^{(1)}(\lambda)}{C(\lambda) \cdot C^{(1)}(\lambda)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где K_1 , K_2 , L_1 и L_2 — целые числа; $\tau_j > 0$, $j = 1, \dots, K_1$, и $\tau_j' \leq 0$, $j = 1, \dots, K_2$, — вещественные числа; $\operatorname{Im} \gamma_j > 0$, $j = 1, \dots, L_1$, $\operatorname{Im} \gamma_j' \leq 0$, $j = 1, \dots, L_2$, а $q_j(\lambda)$, $q_j^{(1)}(\lambda)$ — многочлены относительно λ .

Теорема 3. Если $\xi(t')$ — процесс со случайными стационарными n -ми приращениями, имеющий спектральную плотность (7), а Ξ — случайная величина, для которой функция $f_{\Xi}(\lambda)$ представляется формулой (12), то решение задачи о фильтрации $\xi(t')$ имеет вид

$$\tilde{\Xi} = \sum_{j=0}^{K_1} \sum_{k=0}^{N+n-M-1} W_{k,j} \xi^{(k)}(t - \tau_j) + \int_0^{\infty} w(p) \xi(t - p) dp, \quad (13)$$

где положено $\tau_0 = 0$, а постоянные $W_{k,j}$ и функция $w(p)$ определяются из условия

$$\sum_{j=0}^{K_1} \sum_{k=0}^{N+n-M-1} W_{k,j} (i\lambda)^k e^{-i\tau_j \lambda} + \int_0^{\infty} e^{-ip\lambda} w(p) dp = \frac{\lambda^n [P(\lambda) + Q(\lambda) B(\lambda)]}{B(\lambda) C(\lambda) C^{(1)}(\lambda)}, \quad (14)$$

в котором $P(\lambda)$ означает многочлен $(N + L_1 + L_2 - 1)$ -й степени такой, что отношения $[P(\lambda) + Q(\lambda) B(\lambda)] / C^{(1)}(\lambda)$, $[P(\lambda) - Q^{(1)}(\lambda) B(\lambda)] / A(\lambda) C(\lambda)$ являются целыми функциями λ .

Теорема 3 обобщает ряд результатов (3-5).

4. Пусть требуется найти функционалы $\xi(t+s)$ и Ξ относительно $\xi(t')$, $T - t \leq t' \leq t$, обращающие в минимум математические ожидания (1) и, соответственно, (10). Будем считать, что $f(\lambda)$ имеет вид (7), а $f_{\Xi}(\lambda)$ представляется формулой (12), в которой, однако, теперь удобнее считать, что $0 < \tau_j < T$, $j = 1, \dots, K_1$, и $\tau'_j \leq 0$ или $\tau'_j \geq T$, $j = 1, \dots, K_2$.

Теорема 4. В случае спектральной плотности (7) решение задачи о линейном экстраполировании процесса $\xi(t')$ с интервала $t - T \leq t' \leq t$ на время s вперед дается формулой:

$$\xi(t+s) = \sum_{k=0}^{N+n-M-1} [W_{k,0} \xi^{(k)}(t) + W_{k,1} \xi^{(k)}(t-T)] + \int_0^T w(p) \xi(t-p) dp, \quad (15)$$

где постоянные $W_{k,0}$, $W_{k,1}$ и функция $w(p)$ определяются из условия

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N+n-M-1} [W_{k,0} + W_{k,1} e^{-iT\lambda}] (i\lambda)^k + \int_0^T e^{-ip\lambda} w(p) dp = \\ = \frac{P_0(\lambda) + e^{-iT\lambda} \lambda^n \overline{A(\lambda)} P_1(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

в котором $P_0(\lambda)$ и $P_1(\lambda)$ — многочлены $(N + n - M - 1)$ -й и, соответственно, $(M - 1)$ -й степени такие, что отношения $[P_0(\lambda) + e^{-iT\lambda} \lambda^n \overline{A(\lambda)} P_1(\lambda)] / |B(\lambda)|^2$, $[P_0(\lambda) - e^{-is\lambda} |B(\lambda)|^2] / \lambda^n A(\lambda)$ являются целыми функциями λ .

Теорема 5. Если спектральная плотность процесса $\xi(t')$ задается формулой (7) и Ξ — случайная величина, для которой функция $f_{\Xi}(\lambda)$ имеет вид (12), то решение задачи о фильтрации $\xi(t')$, заданного на конечном интервале $t - T \leq t' \leq t$, представляется формулой

$$\Xi = \sum_{j=0}^{K_1+1} \sum_{k=0}^{N+n-M-1} W_{k,j} \xi^{(k)}(t - \tau_j) + \int_0^T w(p) \xi(t-p) dp, \quad (17)$$

где $\tau_0 = 0$, $\tau_{K_1+1} = T$, а постоянные $W_{k,j}$ и функция $w(p)$ определяются из условия

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{K_1+1} \sum_{k=0}^{N+n-M-1} W_{k,j} (i\lambda)^k e^{-i\tau_j \lambda} + \int_0^T e^{-ip\lambda} w(p) dp = \\ = \frac{\lambda^n [P_0(\lambda) + e^{-iT\lambda} \overline{A(\lambda)} C^{(1)}(\lambda) P_1(\lambda) + Q(\lambda) |B(\lambda)|^2]}{|B(\lambda)|^2 C(\lambda) C^{(1)}(\lambda)}, \end{aligned} \quad (18)$$

в котором $P_0(\lambda)$ и $P_1(\lambda)$ — многочлены $(N + L_1 + L_2 + M - 1)$ -й и, соответственно, $(L_1 + M - 1)$ -й степени такие, что отношение $[P_0(\lambda) + e^{-i\tau\lambda} A(\lambda) C^{(1)}(\lambda) P_1(\lambda) + Q(\lambda) |B(\lambda)|^2] / [|B(\lambda)|^2 C(\lambda) C^{(1)}(\lambda)]$, $[P_0(\lambda) - Q^{(1)}(\lambda) |B(\lambda)|^2] / [A(\lambda) C(\lambda)]$ являются целыми функциями λ .

Для случая $n = 0$ эти предложения были указаны в ⁽⁶⁾ (см. также ⁽⁴⁾, гл. VIII); для $n = 0$ и $n = 1$ они могут быть также выведены из результатов ^(7, 8).

Теоремы 4 и 5 сохраняются без изменения и тогда, когда в (7) $\text{Im } \beta_l = 0$ для некоторых из β_l . В частности, если $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, то $\xi(t')$ будет суммой стационарного случайного процесса и многочлена не выше n -й степени, экстраполирование и фильтрация таких $\xi(t')$ изучались в работе ⁽⁶⁾. Теорема 5 может быть также применена для нахождения наилучшей несмещенной линейной оценки $M \xi(t)$, где $\xi(t)$ — стационарный процесс с плотностью (7), по значениям $\xi(t)$ на конечном интервале (ср. частные примеры в ^(9, 10)).

5. Рассмотрим задачу о построении функционала $\tilde{\xi}(t + s)$, где $0 < s < T$, относительно $\Delta_\tau^{(n)} \xi(t')$ с $t' \leq t$, $\tau > 0$ или же с $t' \geq t + T$, $\tau < 0$, обращающего в минимум (1) (задача о линейном экстраполировании $\xi(t')$). Пусть $f(\lambda)$ дается (7) и всюду положительна.

Теорема 6. Для процесса $\xi(t')$ со случайными стационарными n -ми приращениями, имеющего спектральную плотность (7), решение задачи о линейном интерполировании имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t + s) = & \sum_{h=0}^{N+n-M-1} [W_{h,0} \xi^{(h)}(t) + W_{h,1} \xi^{(h)}(t + T)] + \\ & + \int_0^\infty [w_0(p) \xi(t - p) + w_1(p) \xi(t + T + p)] dp, \end{aligned} \quad (19)$$

где постоянные $W_{h,0}$ и $W_{h,1}$ и функции $w_0(p)$, $w_1(p)$, определяются из условий

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{N+n-M-1} W_{h,0} (i\lambda)^h + \int_0^\infty e^{-ip\lambda} w_0(p) dp &= \frac{P_0(\lambda)}{B(\lambda)}, \\ \sum_{h=0}^{N+n-M-1} W_{h,1} (i\lambda)^h + \int_0^\infty e^{ip\lambda} w_1(p) dp &= \frac{\lambda^n P_1(\lambda)}{B(\lambda)}, \end{aligned} \quad (20)$$

в которых $P_0(\lambda)$ и $P_1(\lambda)$ — многочлены $(N + n - 1)$ -й и, соответственно, $(N - 1)$ -й степени такие, что отношение $[P_0(\lambda) \overline{B(\lambda)} + P_1(\lambda) \lambda^n B(\lambda) - e^{is\lambda} |B(\lambda)|^2] / [\lambda^n |A(\lambda)|^2]$ является целой функцией λ .

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
12 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Яглом, М. С. Пинскер, ДАН, 90, № 5, 731 (1953). ² М. С. Пинскер, А. М. Яглом, ДАН, 94, № 3, 385 (1954). ³ N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, N. Y., 1949. ⁴ В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, М.—Л., 1952. ⁵ А. М. Яглом, Усп. матем. наук, 7, в. 5 (51), 3 (1952). ⁶ L. A. Zadeh, R. Ragazzini, J. Appl. Phys., 21, No. 7, 645 (1950). ⁷ М. Г. Крейн, ДАН, 94, № 1, 13 (1954). ⁸ М. Г. Крейн, ДАН, 94, № 6, 987 (1954). ⁹ U. Grenander, Ark. f. Mat., 1, H. 3, 195 (1950). ¹⁰ W. B. Davenport, R. A. Johnson, D. Middleton, J. Appl. Phys., 23, No. 4, 377 (1952).