

МАТЕМАТИКА

М. А. НАИМДЖ

О КONTИНУАЛЬНОМ АНАЛОГЕ ЛЕММЫ ШУРА

(Представлен!) академики: А. Н. Колмагировым 10 и 1954;

1. Кольца операторных функций. Пусть $\mathcal{H}$ — локально бикомпактное топологическое пространство, H — фиксированное гильбертово или евклидово пространство, а E — совокупность всех вполне непрерывных операторов в H . Обозначим через K совокупность всех операторных функций $A = (A(\mu))$, непрерывных на $\mathcal{H}$, со значениями из E , удовлетворяющих условию $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \|A(\mu)\| = 0$. Определим в K операции сложения, умножения на число, а также инволюцию и норму по формулам:

$$A + B \equiv (A(\mu) + B(\mu)), \quad AB \equiv \{A(\mu)B(\mu)\}, \quad A' \equiv (A'(\mu)),$$

$$\|A\| \equiv \sup_{\mu} \|A(\mu)\| \quad \text{при } A = (A(\mu)), \quad B = (B(\mu)).$$

Тогда K станет $*$ -полным нормированным кольцом с инволюцией $*$.

Пусть K_0 — произвольное замкнутое подкольцо с инволюцией кольца K , а a — фиксированная точка в $\mathcal{H}$; тогда при $A \equiv (A(\mu))$ соответствие $A \rightarrow a(A)$ есть $\mathcal{H}$ -представление кольца K_0 .

Следующая теорема, обобщающая известную теорему о коммутативных нормированных кольцах (см. (5), теорема 16, 56), содержит условия, при которых $K_0 \equiv K$.

Теорема 1. Пусть K_0 — замкнутое подкольцо с инволюцией кольца K такое, что: 1) при любом $a \in \mathcal{H}$ представление $A \rightarrow a(A)$ кольца K_0 неприводимо; 2) при любых $\mu, \nu \in \mathcal{H}$, $\mu \neq \nu$ представление $A \rightarrow \mu(A)$ кольца K_0 неэквивалентно.

Тогда $K_0 = K$.

2. Континуальный аналог леммы Шура. Предположим теперь, что на $\mathcal{H}$ задана мера, т. е. некоторая вполне аддитивная неотрицательная функция множества $\mu(A)$, определенная на всех борелевских множествах $A \subseteq \mathcal{H}$ и конечная на бикомпактных множествах $A \subseteq \mathcal{H}$.

Обозначим через E совокупность всех вектор-функций $E = \{E(\mu)\}$ со значениями из H , измеримых относительно меры μ и удовлетворяющих условию

$$\int \|E(\mu)\|^2 d\mu(\Delta_\mu) < \infty. \quad (1)$$

Очевидно, E — гильбертово пространство; мы будем называть его континуальной прямой суммой (вообще континуума) экзemplаров пространства H и обозначать через $\int_{\mathcal{H}} H d\mu(\Delta_\mu)$. Элементы $A \equiv (A(\mu))$ кольца K можно рассматривать как ограниченные операторы в E , полагая:

$$A \{E\} = (A(\mu)E(\mu)). \quad (2)$$

* По поводу терминологии см. (3).

Пусть теперь M — произвольное кольцо с инволюцией; рассмотрим $*$ -представление $x \rightarrow A_x$ кольца M при помощи операторов из R . В подробной записи это представление имеет вид $x \rightarrow \{a_x(\alpha)\}$, и при фиксированном α соответствие $x \rightarrow a_x(\alpha)$ есть $*$ -представление кольца M в пространстве H .

Применяя теорему 1, мы приходим к следующей теореме, которую можно рассматривать как континуальный аналог леммы Шура:

Теорема 2. Пусть задано $*$ -представление $x \rightarrow \{a_x(\alpha)\}$ $*$ -полного кольца M в пространстве $\mathfrak{H}$ при помощи операторов кольца R , обладающее следующими свойствами: 1) при каждом фиксированном $\alpha \in \mathfrak{A}$ представление $x \rightarrow a_x(\alpha)$ кольца M в пространстве H неприводимо; 2) для любых двух различных точек $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$ представления $x \rightarrow a_x(\alpha_1)$ и $x \rightarrow a_x(\alpha_2)$ кольца M неэквивалентны.

Тогда всякий оператор B в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами $A_x \subset \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, имеет вид: $B = \{\lambda(\alpha) I\}$, где $\lambda(\alpha)$ — измеримая существенно ограниченная числовая функция, а I — единичный оператор в H .

Следствие 1. Пусть M , $x \rightarrow a_x(\alpha)$ и $\mathfrak{H}$ — те же, что и в теореме 2. Тогда всякое подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех операторов $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, есть совокупность всех векторов $\xi = \{\xi_\alpha\}$ в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию

$$\xi_\alpha = 0 \text{ для почти всех } \alpha \in \Delta, \quad (3)$$

где Δ — фиксированное измеримое множество в $\mathfrak{A}$.

Следствие 2. Пусть M , $x \rightarrow a_x(\alpha)$ и $\mathfrak{H}$ — те же, что в теореме 2, и пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех операторов $A_x = \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$. Если $\mathfrak{M}$ содержит вектор $\xi = \{\xi_\alpha\}$, удовлетворяющий условию

$$\xi \neq 0 \text{ для почти всех } \alpha, \quad (4)$$

то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

3. Применение к аналогу формулы Планшереля для классических групп. Пусть $\mathfrak{G}$ — комплексная классическая группа, т. е. либо группа всех линейных преобразований с определителем, равным 1 в комплексном конечномерном пространстве (группа A_n), либо группа всех тех из этих преобразований, которые оставляют инвариантной некоторую невырожденную форму $\varphi(\xi, \eta)$, симметрическую (группы B_n, D_n) или кососимметрическую (группа C_n).

При этом базис в данном конечномерном пространстве мы будем считать выбранным таким образом, чтобы матрица ε_0 формы $\varphi(\xi, \eta)$ имела вид*

$$s_0 = \left\| \begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & 1 & & \\ & & & \end{array} \right\| \quad (5)$$

в случае групп B_n, D_n и

$$\varepsilon_0 = \left\| \begin{array}{cccc} & & & -1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & 1 & & \\ & & & \end{array} \right\| \quad (6)$$

в случае группы C_n .

* На не указанных местах этих матриц стоят нули.

Обозначим: через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц группы $\mathfrak{G}$; через Z — совокупность всех матриц $\zeta \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условиям $\zeta_{pp} = 1$, $\zeta_{pq} = 0$ при $p > q$; через K — совокупность всех матриц $k \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию: $k_{pq} = 0$ при $p > q$; через D — совокупность всех диагональных матриц $\delta \in \mathfrak{G}$; через E — совокупность всех диагональных матриц $\varepsilon \in \mathfrak{G}$ с положительными диагональными элементами; через Γ — совокупность всех диагональных матриц $\gamma \in \mathfrak{U}$; через S — совокупность всех матриц $s \in \mathfrak{G}$, осуществляющих подстановку координатных осей и таких, что $s^{-1}\delta s \in D$ для всех $\delta \in D$. Очевидно, $\mathfrak{U}$, Z , K , D , E , Γ и S — подгруппы* группы $\mathfrak{G}$, причем $\Gamma = D \cap \mathfrak{U}$, $E \subset D$, $Z \subset K$, $D \subset K$, $S \subset \mathfrak{U}$. В группах $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$, Z , D , E , Γ существует двусторонне инвариантная мера, дифференциал которой обозначим $d\mu(g)$, $d\mu(u)$, $d\mu(\zeta)$, $d\mu(\delta)$, $d\mu(\varepsilon)$, $d\mu(\gamma)$, соответственно; при этом $d\mu(u)$ и $d\mu(\gamma)$ мы будем считать нормированными так, что $\int d\mu(u) = 1$, $\int d\mu(\gamma) = 1$. В группе K существуют лево- и право-инвариантные меры, дифференциалы которых обозначим $d\mu_l(k)$ и $d\mu_r(k)$, соответственно; положим $\beta(k) = d\mu_l(k)/d\mu_r(k)$. Пусть X — группа характеров χ группы D ; полагая $\chi_s(\delta) = \chi(s^{-1}\delta s)$, мы получим гомеоморфизм $X \rightarrow X$ в X ; обозначим через X_e максимальное открытое множество в X такое, что если $\chi \in X_e$ и $s \neq e$, то $\chi_s \neq \chi$. Наконец, через $d\mu(\chi)$ обозначим дифференциал инвариантной меры в X .

Каждому $\chi \in X$ отвечает неприводимое унитарное представление $g \rightarrow T_g^\chi$ группы $\mathfrak{G}$ в некотором пространстве $\mathfrak{H}^\chi$; это представление строится следующим образом: $\mathfrak{H}^\chi$ есть совокупность всех измеримых функций $f(u)$, удовлетворяющих условиям

$$f(\gamma u) = \chi(\gamma) f(u), \quad \int |f(u)|^2 d\mu(u) < \infty$$

и

$$T_g^\chi f(u) = \chi(\varepsilon) \beta^{-1/2}(\varepsilon) f(v) \quad \text{при } ug = \varepsilon \zeta v.$$

Два таких представления $g \rightarrow T_g^\chi$ и $g \rightarrow T_g^{\chi'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi' = \chi_s$ при некотором $s \in S$. Совокупность всех представлений $g \rightarrow T_g^\chi$, $\chi \in X$, называется основной серией** представлений группы $\mathfrak{G}$.

Пусть R' — совокупность всех непрерывных функций $x(g)$ на $\mathfrak{G}$, равных нулю вне компактного множества (своего для каждой $x(g)$). Для $x(g) \in R'$ оператор $T_x^\chi = \int x(g) T_g^\chi d\mu(g)$ есть интегральный оператор в $\mathfrak{H}^\chi$ с ядром

$$K(u_1, u_2, \chi) = \int x(u_1^{-1} \delta \zeta u_2) \beta^{-1/2}(\delta) \chi(\delta) d\mu(\delta) d\mu(\zeta). \quad (7)$$

При этом

$$K(\gamma u_1, u_2, \chi) = \chi(\gamma) K(u_1, u_2, \chi), \quad K(u_1, u_2 \gamma, \chi) = \overline{\chi(\gamma)} K(u_1, u_2, \chi) \quad (8)$$

и

$$\int |x(g)|^2 d\mu(g) = \int \left[\iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2 d\mu(u_1) d\mu(u_2) \right] \omega(\chi) d\mu(\chi), \quad (9)$$

где $\omega(\chi)$ — некоторая неотрицательная функция, вид которой нам не понадобится. Формула (9) называется аналогом формулы Планшереля***.

* Подробно об этих подгруппах см. в (4).

** Подробно об основной серии см. в (4).

*** Впервые (для группы A_2) эта формула была получена в (2), а затем обобщена в (3, 4, 6). Наиболее простой ее вывод см. в (1).

Пусть $L_2(\mathfrak{G})$ — гильбертово пространство всех измеримых функций $x(g)$ на $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию $\int |x(g)|^2 d\mu(g) < \infty$, а $\mathfrak{H}_K$ гильбертово пространство всех измеримых функций $K(u_1, u_2, \chi)$, $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$, $\chi \in X_e$, удовлетворяющих условиям (8) и условию

$$\int_{X_e} \left[\iint |K(u_1, u_2, \chi)|^2 d\mu(u_1) d\mu(u_2) \right] \omega(X) d\mu(\chi) < \infty.$$

Формула (9) означает, что соответствие $x \rightarrow K$, устанавливаемое формулой (7), есть изометрическое отображение множества $R' \subset L_2(\mathfrak{G})$ в пространстве $\mathfrak{H}_K$; это отображение продолжается, и притом единственным образом, до изометрического отображения $L_2(\mathfrak{G})$ в $\mathfrak{H}_K$.

Пользуясь следствием 1 из теоремы 2, можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Образ пространства $L_2(\mathfrak{G})$ при изометрическом отображении $x \rightarrow K$, определенном формулой (7), есть все пространство $\mathfrak{H}_K$.*

Поступило
10 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, М. О. Граев, ДАН, **92**, № 2, 221 (1953). ² И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, 411 (1947). ³ И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, ДАН, **63**, 609 (1948). ⁴ И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **36**, 1 (1950). ⁵ И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов, Усп. матем. наук, **1**, в. 2 (12), 48 (1946). ⁶ Harish-Chandra, Proc. Nat. Acad. Sci USA, **37**, 813 (1951). ⁷ М. А. Наймарк, Усп. матем. наук, **3**, 5 (27), 52 (1948).