

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Вводя в рассмотрение комплексную функцию $U = u + iv$, систему уравнений эллиптического типа

$$u_x - v_y + au + bv = 0, \quad u_y + v_x + cu + dv = 0 \quad (1)$$

можно записать в комплексной форме в виде одного уравнения

$$\partial_{\bar{z}} U + AU + B\bar{U} = 0 \quad \partial_{\bar{z}} \equiv 1/2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$(4A = a + d + ic - ib, \quad 4B = a - d + ic + ib).$$

В работе автора ⁽¹⁾ были указаны способы, позволяющие строить решения системы (1) и изучать их свойства в областях, где коэффициенты непрерывны и суммируемы. В настоящей работе, обобщая эти прежние результаты, мы укажем новые формулы, которые позволяют исследовать свойства решений системы (1) в более общем случае, когда ее коэффициенты допускают особенности высокого порядка определенного типа. Кроме того, мы укажем способ, позволяющий по данной аналитической функции $f(z)$ строить решения системы (1), которые имеют вид $U(z) = f(z) \exp w(z)$, где w — непрерывная функция.

1. Рассмотрим предварительно неоднородную систему Коши—Римана $\partial_{\bar{z}} U = F(z)$, понимая под $\partial_{\bar{z}}$ операцию дифференцирования в обобщенном смысле, указанном в ⁽³⁾. Обозначим через G некоторое открытое множество плоскости $z = x + iy$. Пусть существует аналитическая в G функция $\varphi(z)$ * такая, что $\varphi(z)F(z)$ суммируема на G . В таком случае все решения уравнения $\partial_{\bar{z}} U = F$ получаются из формулы

$$U(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi \varphi(z)} \iint_G \frac{\varphi(t) F(t) d\bar{t} dt}{t - z} \quad (t = \xi + i\eta), \quad (3)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая функция в G . Если $F(z)$ суммируема на G , то можно принять $\varphi(z) = 1$. В этом случае формула (3) была доказана в ⁽³⁾. Если $F \in L_p(G)$, $p > 2$, то $U - \Phi$ будет непрерывна в G ⁽³⁾ (полагаем $\varphi = 1$).

Назовем функцию $\varphi(z)$ аналитическим регуляризатором $F(z)$ в отношении множества G . Укажем два важных случая, когда нетрудно найти аналитические регуляризаторы.

* Под аналитической функцией на открытом множестве G мы подразумеваем функцию, голоморфную всюду в G за исключением дискретного множества изолированных особых точек; это множество, очевидно, может быть и пустым.

Пусть $\bar{G}$ — замыкание, G — ограниченное множество. Пусть $F(z)$ суммируема на множестве $\bar{G}_\rho \equiv \mathcal{G}(z \in \bar{G}, |z - z_1| \geq \rho, \dots, |z - z_n| \geq \rho)$, где $z_1, \dots, z_n$ — фиксированные точки $\bar{G}$, ρ — любое число > 0 , причем вблизи точек $z_1, \dots, z_n$ $F(z) = O(|z - z_k|^{-\alpha_k})$, $\alpha_k \geq 2$, $k = 1, \dots, n$. Тогда полином $\varphi(z) = \prod_1^n (z - z_k)^{[\alpha_k] - 1}$ будет аналитическим регуляризатором $F(z)$ в отношении G ($[\alpha]$ — целая часть α).

Пусть G — неограниченное множество. Пусть $F(z)$ суммируема на замкнутом множестве $\bar{G}_\rho \equiv \mathcal{G}(z \in \bar{G}, |z| \leq \rho)$ для любого $\rho > 0$, причем вблизи бесконечности $F(z) = O(|z|^\alpha)$. При $\alpha < -1$, очевидно, можно принять $\varphi(z) = 1$. Если $\alpha \geq -1$ то, как легко показать, существует полином $p(z)$ степени не меньше $[\alpha] + 2$ с простыми корнями такой, что $F(z)/p(z)$ суммируема на G . Следовательно, в этом случае $\varphi(z) = 1/p(z)$ будет аналитическим регуляризатором $F(z)$ в отношении G .

2. Вернемся теперь к системе уравнений (1). Имеет место следующее

Теорема 1. Пусть $A(z)$ и $B(z)$ — непрерывные в G функции, обладающие аналитическими регуляризаторами $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, соответственно. Пусть $U(z)$ — решение уравнения (2), регулярное в G всюду, за исключением, быть может, некоторого дискретного множества изолированных особых точек. Тогда существует аналитическая в G функция $f(z)$ такая, что

$$U(z) = f(z) \exp w(z), \quad (4)$$

где

$$w = \frac{1}{\pi \varphi(z)} \iint_G \frac{\varphi(t) A(t)}{t - z} d\bar{z} d\eta + \frac{1}{\pi \psi(z)} \iint_G \frac{\psi(t) B(t) \overline{U(t)}}{(t - z) U(t)} d\bar{z} d\eta. \quad (4a)$$

Если A и B суммируемы в G , то можно считать $\varphi = \psi = 1$. В этом случае формула (4) была доказана нами ранее ^(1, 2) *.

Формула (4) позволяет распространить ряд важных свойств аналитических функций одного комплексного аргумента на решения системы (1). Обобщаются такие свойства, как принцип аргумента и ряд вытекающих из него следствий (теорема Руше и др.), свойства единственности аналитических функций, в том числе теорема Лузина — Привалова, принцип компактности, свойство сгущения значений, теорема об аналитическом продолжении по непрерывности, локальная однолистность отображений и т. д.

Формула (4) позволяет исследовать также свойства решений системы (1) вблизи особых точек коэффициентов. Рассмотрим для примера случай одной особой точки.

Пусть $A(z)$ и $B(z)$ непрерывны в области $T_{z_0, \rho} \equiv \mathcal{G}(0 < |z - z_0| \leq \rho)$ и пусть $U(z)$ — однозначное регулярное в этой области решение уравнения (2). Рассмотрим тот случай, когда взятые по области $T_{z_0, \rho}$ интегралы $A_1(z) = \iint A(t) (t - z)^{-1} d\bar{z} d\eta$, $B_1(z) = \iint B(t) \chi(t) (t - z)^{-1} d\bar{z} d\eta$, $\chi(t) = \overline{U(t)}/U(t)$, непрерывны в $T_{z_0, \rho}$; это будет иметь место, например, если $A(z) = O(|z - z_0|^\alpha)$, $B(z) = O(|z - z_0|^\beta)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

* Как показал иным путем Берс ⁽⁶⁾, формула (4) имеет место также и для более широкого класса так называемых псевдо-аналитических функций. Однако у Берса мы не находим формулы (4a), явно выражающей $w(z)$ через $U(z)$, которая была выведена в ⁽¹⁾ (при $\varphi = \psi = 1$). Благодаря именно формуле (4a) представление (4) получило важные применения в нашей работе ⁽¹⁾. Не знаю, учитывал ли в полной мере это обстоятельство Берс, поместивший в ⁽⁸⁾ обстоятельный реферат нашей работы ⁽¹⁾, делая замечания о том, что формула (4) является специальным случаем его результата. Нужно иметь еще в виду, что $w(z)$ в формуле (4) не определяется однозначно (см. ниже п. 4).

Тогда могут представиться следующие возможности: 1) z_0 — устранимая особая точка для $U(z)$, причем тогда (и только тогда) $U(z)$ ограничена в окрестности z_0 ; 2) z_0 — полюс для $U(z)$, т. е. существует целое число $m > 0$ такое, что $U(z) = (z - z_0)^{-m} U_0(z)$, причем $U_0(z)$ непрерывна в $T_{z_0, \rho}$ и $U_0(z_0) \neq 0$; в этом случае $U(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$; 3) z_0 — существенно особая точка для $U(z)$, причем тогда (и только тогда) $\lim_{z \rightarrow z_0} U(z)$ при $z \rightarrow z_0$ не существует, но сохраняется теорема Сохоцкого — Вейерштрасса.

Несколько иную картину мы получим, если $A_1(z)$ и $B_1(z)$ ограничены, но разрывны в точке z_0 . Например, при ограниченности $U(z)$ точка z_0 будет, вообще говоря, неустранимой особой точкой (точка разрыва первого рода); при реализации условия: $U(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow z_0$ попрежнему $U(z) = (z - z_0)^{-m} U_0(z)$, но $U_0(z)$ будет ограниченной функцией, имеющей, вообще говоря, разрыв в точке z_0 . Представляет интерес изучить также тот случай, когда $A_1(z)$ и $B_1(z)$ — неограниченные функции, или же более общий случай, когда $A(z)$ и $B(z)$ не суммируемы, но обладают аналитическими регуляризаторами $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в окрестности z_0 .

3. Нетрудно доказать также следующую теорему, обобщающую теорему Лиувилля:

Теорема 2. Пусть $A(z)$ и $B(z)$ непрерывны в G , причем $\bar{G}$ совпадает с полной плоскостью. Пусть для всякого фиксированного $r > 0$ множество $\mathcal{G}(z \in \bar{G} - G, |z| \leq r)$ либо пустое, либо же состоит из конечного числа точек $a_1, \dots, a_n$ и конечного числа спрямляемых кривых Жордана $L_1, \dots, L_n$. Пусть $U(z)$ — регулярное в G решение уравнения (2), непрерывное и ограниченное на $\bar{G}$. Если взятые по области G интегралы $\iint A(t)(t-z)^{-1} d\bar{z} d\eta$, $\iint B(t)\chi(t)(t-z)^{-1} d\bar{z} d\eta$, $\chi = \bar{U}/U$, непрерывны и ограничены в $\bar{G}$ и $U(z)$ обращается в нуль в некоторой точке z_0 плоскости или на бесконечности, то $U(z) \equiv 0$ всюду в G .

4. Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические регуляризаторы $A(z)$ и $B(z)$ в отношении открытого множества G — таковы, что $\varphi(z) \neq 0$, $\psi(z) \neq 0$ при $z \in G$. Тогда, согласно теореме 1, любое решение $U(z)$ уравнения (2), которое может иметь дискретное множество особых точек, представляется в виде (4), причем $w(z)$ непрерывна в G (мы считаем, что $A\varphi$ и $B\psi \in L_p(G)$, $p > 2$). В таком случае $f(z)$ мы назовем аналитическим делителем, а $w(z)$ — логарифмическим частным решения $U(z)$ системы (1) в отношении G . Нетрудно видеть, что все аналитические делители и логарифмические частные решения $U(z)$ в отношении G имеют вид: $f_1 = f \exp g(z)$, $w_1 = w - g$, где $g(z)$ — произвольная голоморфная в G функция от z .

5. Поставим теперь следующую задачу: отыскать по заданному аналитическому делителю соответствующее ему решение уравнения (2). Нужно доказать, что формула (4) допускает обращение.

Пусть $A(z)$ и $B(z)$ непрерывны на открытом множестве G и обладают регуляризаторами $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, соответственно. Мы можем ограничиться рассмотрением случая $A \equiv 0$, ибо общий случай приводится к этому при помощи подстановки

$$U(z) = V(z) \exp \left(\frac{1}{\pi \varphi(z)} \iint_G \frac{\varphi(t) A(t) d\bar{z} d\eta}{t-z} \right). \quad (5)$$

Пусть $f(z)$ — заданная аналитическая в G функция. Рассмотрим уравнение

$$\partial_{\bar{z}} V + B_0(z) \bar{V} = 0, \quad B_0 = \frac{B(z) \overline{f(z)}}{f(z)}. \quad (6)$$

Это уравнение эквивалентно интегральному уравнению

$$V(z) - \frac{1}{\pi \psi(z)} \iint_G \frac{\psi(t) B_0(t) \overline{V(t)}}{t-z} d\xi d\eta = \Phi(z), \quad (7)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная аналитическая в G функция. К этому интегральному уравнению, вообще говоря, теория Фредгольма неприменима, так как функция $\psi(z)$ может иметь на $\bar{G}$ нули или другие особые точки. Поэтому мы рассмотрим случай, когда $\psi(z) = 1$. Допустим сначала, что G — ограниченное множество. Тогда (при $\psi = 1$) как известно ⁽¹⁾, уравнение (7) разрешимо для любой правой части. Обозначим через $V_f(z)$ решение его, соответствующее $\Phi = 1$. Нетрудно доказать, что $V_f(z) = \exp \omega_f(z)$, где $\omega_f = \pi^{-1} \iint B(t) \chi(t) (t-z)^{-1} d\xi d\eta$, $\chi = \overline{V_f} / V_f$, причем интеграл берется по области G . Легко проверить, что $U(z) = f(z) V_f(z)$ есть искомое решение уравнения (2). Можно доказать существование такого решения и в случае бесконечной области G , если $A(z)$ и $B(z)$ непрерывны и ограничены в G , причем вблизи бесконечности $A = O(|z|^\alpha)$, $B = O(|z|^\beta)$, $\alpha < -1$, $\beta < -1$.

Указанный выше путь позволяет строить решения уравнения (2), обладающие заранее фиксированными особенностями любого порядка. В частности, при изучении граничных задач существенно важную роль играют решения, которые имеют аналитические делители вида $(z-\zeta)^{-1}$ или $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^n \lg\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$, где n — целое положительное число, ζ — произвольно фиксированная точка ^(1, 4).

6. Рассмотрим теперь систему уравнений эллиптического типа общего вида:

$$\begin{aligned} a_1 u_x + a_2 u_y + b_1 v_x + b_2 v_y + a u + b v &= 0, \\ c_1 u_x + c_2 u_y + d_1 v_x + d_2 v_y + c u + d v &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Эту систему при довольно общих условиях, налагаемых на коэффициенты, можно привести к виду (1) посредством замены независимых переменных. Поэтому указанные выше свойства решений системы (1) легко переносятся и на решения системы (8).

Наконец, отметим, что на основе теории псевдоаналитических функций свойства решений системы (8) исследованы также в работах Л. Берса ^(5, 7) (с содержанием работы ⁽⁷⁾ я познакомился лишь по реферату ⁽⁸⁾).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Н. Векуа, Матем. сборн., **31** (73): 2, 217 (1952). ² И. Н. Векуа, Сообщ. АН СССР, **14**, № 8, 449 (1953). ³ И. Н. Векуа, ДАН, **89**, № 5, 773 (1953). ⁴ И. Н. Векуа, Новые методы решения уравнений эллиптического типа, М., 1948. ⁵ L. Bers, Comm. Pure and Appl. Math., **6**, 513 (1953). ⁶ L. Bers, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37**, No. 1, 42 (1951). ⁷ L. Bers, Theory of Psuedo-analytic Functions, N. Y., 1953. ⁸ L. Bers, Math. Rev., **15**, No. 3 (1954).