

С. Д. БЕРМАН

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПОЛУПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 VI 1954)

Пусть группа G представляет собой полупрямое произведение абелевых конечных групп H_1 и H_2^* . Обозначим групповую алгебру G над полем K комплексных чисел через $R(G, K)$. В этой заметке строится полная система ортогональных минимальных идемпотентов и идемпотентов центра алгебры $R(G, K)$.

Пусть a_1 (единица), $\dots$, $a_n(b_1, \dots, b_m)$ — элементы $H_1(H_2)$; $\chi_1, \dots, \chi_n(\chi'_1, \dots, \chi'_m)$ — характеры $H_1(H_2)$; $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ ($M' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$) — полная система минимальных идемпотентов подалгебры $R(H_1, K)$ ($R(H_2, K)$).

Имеют место формулы ⁽¹⁾:

$$e_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_i(a_k^{-1}) a_k; \quad e'_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \chi'_j(b_k^{-1}) b_k; \quad (1)$$

$$a_k e_i = \chi_i(a_k) e_i; \quad b_s e'_j = \chi'_j(b_s) e'_j \quad (i, k = 1, \dots, n; s, j = 1, \dots, m). \quad (2)$$

Каждый элемент $b_i \in H_2$ определяет автоморфизм φ_i алгебры $R(H_1, K)$:

$$\varphi_i(a) = b_i a b_i^{-1} \quad (a \in R(H_1, K); i = 1, \dots, m). \quad (3)$$

Аutomорфизмы φ_i порождают взаимно-однозначные отображения группы H_1 и множества M на себя.

По отношению к группе различных преобразований φ_i множества H_1 и M распадаются на непересекающиеся области транзитивности:

$$H_1 = H_1^{(1)} \cup \dots \cup H_1^{(t)}; \quad M = M^{(1)} \cup \dots \cup M^{(r)}.$$

Элементы $a_i, a_j \in H_1$ (идемпотенты $e_i, e_j \in M$) принадлежат множеству $H_1^{(s)}$ ($M^{(s)}$) тогда и только тогда, когда существует автоморфизм φ_k такой, что $\varphi_k(a_i) = a_j$ ($\varphi_k(e_i) = e_j$).

Множества $H_1^{(i)}$ ($i = 1, \dots, t$) являются классами сопряженных элементов G , содержащимися в H_1 .

Пусть $H_1^{(i)} = \{a_1^{(i)}, \dots, a_{\alpha_i}^{(i)}\}$; $M^{(j)} = \{e_1^{(j)}, \dots, e_{\beta_j}^{(j)}\}$ ($i = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, r$). Положим

$$\bar{e}_j = \sum_{s=1}^{\beta_j} e_s^{(j)}; \quad \bar{a}_i = \sum_{s=1}^{\alpha_i} a_s^{(i)} \quad (i = 1, \dots, t; j = 1, \dots, r). \quad (4)$$

*Группа G называется полупрямым произведением групп H_1 и H_2 , если $G = H_1 \cdot H_2$, $H_1 \cap H_2 = 1$ и H_1 — нормальный делитель G .

Элементы $\bar{e}_j$ ($j = 1, \dots, r$), очевидно, являются идемпотентами в $R(G, K)$ и удовлетворяют условию:

$$\bar{e}_j b_k = b_k e_j \quad (j = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, m). \quad (5)$$

Произвольный элемент $x \in R(H_1, K)$ представляется в виде: $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$ ($\lambda_i, \gamma_i \in K; i = 1, \dots, n$). Элементы $x \in R(H_1, K)$, выдерживающие действие всех автоморфизмов φ_i ($i = 1, \dots, m$), образуют подалгебру $P = R(H_1, K) \cap Z$, где Z — центр $R(G, K)$.

Если $x \in P$, а идемпотенты e_i и e_j принадлежат одному множеству $M^{(s)}$, то существует такой автоморфизм φ_k , что $\varphi(e_i) = e_j$. Тогда $x = \varphi_k(x) = \gamma_i e_j + \dots + \gamma_j e_i$. Значит, $\gamma_i = \gamma_j$ и x представляется в виде:

$$x = \gamma'_1 \bar{e}_1 + \dots + \gamma'_r \bar{e}_r \quad (\gamma'_i \in K; i = 1, \dots, r). \quad (6)$$

С другой стороны, очевидно, $x = \lambda'_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda'_t \bar{a}_t$ ($\lambda'_i \in K; i = 1, \dots, t$). Следовательно, элементы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ и $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_t$ образуют два различных базиса алгебры P над K и $r = t$.

В силу (6), для любого $x \in P$ имеет место формула $x \bar{e}_i = \gamma'_i \bar{e}_i$. В частности,

$$a_j \bar{e}_i = \gamma_{ji} \bar{e}_i \quad (\gamma_{ji} \in K; i, j = 1, \dots, t). \quad (7)$$

Множеству $H_1^{(i)}$ ($M^{(i)}$) соответствует подгруппа F_i (F'_i) группы H_2 , состоящая из всех элементов H_2 , которые порождают автоморфизмы φ , оставляющие на месте элемент $a_1^{(i)}$ (e_1) ($i = 1, \dots, t$) *.

Обозначим порядок группы F_i (F'_i) через m_i (m'_i). Очевидно, число элементов множества $H_1^{(i)}$ ($M^{(i)}$) равно индексу подгруппы F_i (F'_i) в H_2 , т. е. имеют место равенства

$$\alpha_i = \frac{m}{m_i}; \quad \beta_i = \frac{m}{m'_i} \quad (i = 1, \dots, t). \quad (8)$$

Если $a \in H_1^{(i)}$, то, в силу (4) и (8), справедлива формула

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k(a) = m_i \bar{a}_i \quad (i = 1, \dots, t). \quad (9)$$

Пусть $c_1^{(i)}, \dots, c_{m'_i}^{(i)}$ — элементы F'_i , $u_1^{(i)}, \dots, u_{m_i}^{(i)}$ — полная система минимальных идемпотентов подалгебры $R(F'_i, K)$ ($i = 1, \dots, t$). Тогда выполняются равенства

$$c_k^{(i)} e_s^{(i)} = e_s^{(i)} c_k^{(i)} \quad (k = 1, \dots, m'_i; s = 1, \dots, \beta_i; i = 1, \dots, t). \quad (10)$$

Положим

$$\tilde{e}_{ij} = \bar{e}_i e'_j; \quad e''_{is} = \bar{e}_i u_s^{(i)} \quad (i = 1, \dots, t; j = 1, \dots, m; s = 1, \dots, m'_i).$$

Ввиду (5) и (10) элементы $\tilde{e}_{ij}$ и e''_{is} являются идемпотентами.

* Вместо $a_1^{(i)}$ и $e_1^{(i)}$ можно взять произвольные элементы из множеств $H_1^{(i)}$ и $M^{(i)}$.

Лемма 1. Если $e = \frac{s}{n} a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n$ — идемпотент, I — левый идеал, порожденный e в $R(G, K)$, то степень I над K равна s .

Доказательство леммы проводится путем перехода к регулярному представлению.

Лемма 2. Для любого элемента $a_k \in H_1$ имеет место соотношение

$$\tilde{e}_{ij} a_k \tilde{e}_{ij} = \Lambda_{ij}^{(k)} \tilde{e}_{ij} \quad (\Lambda_{ij}^{(k)} \in K; i = 1, \dots, t; j = 1, \dots, m).$$

Доказательство. Пусть $a_k \in H_1^{(p)}$. Ввиду (1) и (3)

$$e'_j a_k = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \chi'_j(b_s^{-1}) b_s a_k = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \varphi_s(a_k) \chi'_j(b_s^{-1}) b_s.$$

Учитывая (2) и (9), получим

$$\begin{aligned} e'_j a_k e'_j &= \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \varphi_s(a_k) \chi'_j(b_s^{-1}) b_s \cdot \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m \chi'_j(b_q^{-1}) b_q = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m \varphi_s(a_k) \cdot \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m \chi'_j(b_q^{-1}) b_q = \frac{m_p}{m} \bar{a}_p e'_j. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу (5), (11) и (7)

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{ij} a_k \tilde{e}_{ij} &= \bar{e}_i e'_j a_k \bar{e}_i e'_j = e'_j a_k e'_j \bar{e}_i^2 = \\ &= \frac{m_p}{m} \bar{a}_p \bar{e}_i e'_j = \frac{m_p}{m} \gamma_{pi} \bar{e}_i e'_j = \frac{m_p}{m} \gamma_{pi} \tilde{e}_{ij}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Идемпотенты $\tilde{e}_{ij}$ образуют полную систему минимальных ортогональных идемпотентов групповой алгебры $R(G, K)$.

Доказательство. Легко проверяются соотношения:

$$a_1 = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^m \tilde{e}_{ij}; \quad \tilde{e}_{i_1 j_1} \cdot \tilde{e}_{i_2 j_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } i_1 \neq i_2 \text{ или } j_1 \neq j_2; \\ \tilde{e}_{i_1 j_1}, & \text{если } i_1 = i_2, j_1 = j_2. \end{cases}$$

Пусть I_{ij} — левый идеал, порожденный идемпотентом $\tilde{e}_{ij}$. Рассмотрим алгебру R_{ij} операторных эндоморфизмов идеала I_{ij} (в качестве операторов рассматриваются элементы $R(G, K)$).

Произвольный эндоморфизм $\theta \in R_{ij}$ представляется в виде:

$$\theta(x) = xc \quad (x, c \in I_{ij}), \quad (12)$$

и при любом $c \in I_{ij}$ формула (12) определяет операторный эндоморфизм идеала I_{ij} .

Положим $\theta_s(x) = x a_s \tilde{e}_{ij}$ ($x \in I_{ij}; s = 1, \dots, n$). Ранг R_{ij} над K равен максимальному числу линейно независимых эндоморфизмов среди эндоморфизмов $\theta_1, \dots, \theta_n$. Так как $x = x \tilde{e}_{ij}$, то, ввиду леммы 2, $\theta_s(x) = x \tilde{e}_{ij} a_s \tilde{e}_{ij} = \Lambda_{ij}^{(s)} x$. Значит все эндоморфизмы θ_s ($s = 1, \dots, n$) можно отождествить с комплексными числами $\Lambda_{ij}^{(s)}$ и ранг R_{ij} над K равен 1.

Отсюда заключаем, что идеал I_{ij} неразложим в прямую сумму идеалов ⁽¹⁾.

Теорема 2. Идемпотенты e''_{is} ($i = 1, \dots, t; s = 1, \dots, m_i$) образуют полную систему минимальных идемпотентов центра $R(G, K)$.

Доказательство. Пусть $u_s^{(i)} = \sum_{p=1}^{m_i'} \alpha_p c_p^{(i)}$; $a_k \in H_1$. Ввиду (4), (10) и (2)

$$\begin{aligned} e_{is}'' a_k &= \sum_{q=1}^{\beta_i} e_q^{(i)} \cdot \sum_{p=1}^{m_i'} \alpha_p c_p^{(i)} a_k = \sum_{p=1}^{m_i'} \sum_{q=1}^{\beta_i} \alpha_p c_p^{(i)} e_q^{(i)} a_k = \\ &= \sum_{p=1}^{m_i'} \sum_{q=1}^{\beta_i} \alpha_p c_p^{(i)} \chi_q^{(i)}(a_k) e_q^{(i)} = \sum_{q=1}^{\beta_i} \chi_q^{(i)}(a_k) e_q^{(i)} \sum_{p=1}^{m_i'} \alpha_p c_p^{(i)} = \\ &= a_k \sum_{q=1}^{\beta_i} e_q^{(i)} \sum_{p=1}^{m_i'} \alpha_p c_p^{(i)} = a_k e_{is}'' \quad (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Следовательно, e_{is}'' является идемпотентом центра $R(G, K)$.

Пусть I_{is}'' — левый идеал, порожденный идемпотентом e_{is}'' . В силу (8) $e_{is}'' = \frac{\beta_i^2}{nm} a_1 + \dots$. Значит, на основании леммы 1, I_{is}'' над K равна β_i^2 .

Из равенств

$$\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{m_i'} e_{ik}''; \quad \bar{e}_i = \sum_{k=1}^m \tilde{e}_{ik}$$

вытекает, что e_{is}'' разлагается в сумму некоторых из идемпотентов $\tilde{e}_{ih}$.

Так как минимальный идемпотент $\tilde{e}_{ij}$ ($j = 1, \dots, m$), ввиду леммы 1, порождает идеал степени β_i над K , то идемпотент e_{is}'' неразложим в сумму идемпотентов центра.

Теорема 3. Минимальные идемпотенты $\tilde{e}_{i_1 j_1} = \bar{e}_{i_1} e'_{j_1}$ и $\tilde{e}_{i_2 j_2} = \bar{e}_{i_2} e'_{j_2}$ определяют эквивалентные представления G тогда и только тогда, когда $i_1 = i_2$ и на подгруппе F'_{i_1} значения характеров χ'_{j_1} и χ'_{j_2} совпадают.

Теорема 4. Если H_2 — циклическая группа, то степени абсолютно неприводимых представлений G совпадают с порядками классов $H_1^{(i)}$ — числами $\alpha_1, \dots, \alpha_t$, причем существует точно m/α_i неприводимых неэквивалентных представлений степени α_i ($i = 1, \dots, t$).

Теорема 4 неверна для произвольной абелевой группы H_2 , что показывает, например, рассмотрение групповой алгебры группы с определяющими соотношениями: $a^p = 1$; $b^p = 1$; $b^{-1}ab = a$; $c^{-1}ac = a^{1+p}$; $c^{-1}bc = b$; $d^{-1}ad = ab$; $d^{-1}bd = b$; $d^{-1}cd = c$; $c^p = 1$; $d^p = 1$.

Ужгородский
государственный университет

Поступило
16 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 1947.