

Л. М. АБРАМОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 VI 1954)

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[-1, 1]$ функция и

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^n c_k \hat{T}_k(x) \quad (1)$$

частная сумма порядка n ее ряда Фурье по ортонормированной системе полиномов П. Л. Чебышева

$$\hat{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad \hat{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$c_k = \int_{-1}^1 f(t) \hat{T}_k(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (2)$$

В ряде вопросов теории приближения функций известную роль играют многочлены

$$\sigma_{n,p}(f; x) = \frac{S_{n-p}(f; x) + S_{n-p+1}(f; x) + \dots + S_n(f; x)}{p+1}, \quad (3)$$

образованные для каждой пары значений n и p ($n=0, 1, 2, \dots$; $0 \leq p \leq n$) и представляющие собой соответствующие усеченные средние арифметические полиномов (1) так же, как и суммы Валле-Пуссена ⁽¹⁾ в теории тригонометрических рядов Фурье.

Настоящая заметка посвящена вопросу об асимптотическом поведении функции Лебега метода (3), т. е. функции

$$L_{n,p}(x) = \sup_{|f(x)| \leq 1} |\sigma_{n,p}(f; x)| \quad (4)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Для концов рассматриваемого сегмента, т. е. когда $x = \pm 1$, эта задача была фактически решена С. М. Никольским ⁽²⁾, показавшим, что

$$L_{n,p}(\pm 1) = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n}{p+1} + O(1). \quad (5)$$

В работах А. Ф. Тимана ^(3,4) получена оценка асимптотического поведения функции (4) для всего сегмента $[-1, 1]$ в случае $p=0$, а именно, доказано, что равномерно относительно всех $x \in [-1, 1]$ при $n \rightarrow \infty$

$$L_{n,0}(x) = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1+ny}{\left(y+\frac{1}{n}\right)^{|\cos ny|}} + O(1) \quad (y = \arccos x). \quad (6)$$

Мы ставим себе целью получить здесь соответствующую оценку поведения указанной функции Лебега в общем случае, т. е. на всем сегменте $[-1, 1]$ и для любых p .

Теорема. Для всех $x \in [-1, 1]$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая оценка:

$$L_{n,p}(x) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \ln \frac{1+ny}{1+(p+1)y} + |\cos ny| \ln \frac{y + \frac{1}{n+1}}{y + \frac{1}{n}} \right\} + O(1), \quad (7)$$

где $y = \arccos x$ и $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно x и p ($0 \leq p \leq n$).

Доказательство. Из известных соображений следует, что

$$L_{n,p}(x) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-1}^1 \left| \sum_{v=0}^p \left\{ 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-v} \cos ky \cdot \cos k \arccos t \right\} \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (8)$$

Отсюда, в результате несложных преобразований, получаем равенство

$$L_{n,p}(x) = \frac{1}{2\pi(p+1)} \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t+y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t+y)}{\sin^2 \frac{t+y}{2}} + \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t-y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t-y)}{\sin^2 \frac{t-y}{2}} \right| dt, \quad (9)$$

причем, без ограничения общности, можно считать $0 \leq y \leq \pi/2$.

Для оценки выражения (9) мы представляем $L_{n,p}(x)$ в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi(p+1)} \int_0^y \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t+y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t+y)}{\sin^2 \frac{t+y}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t-y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t-y)}{\sin^2 \frac{t-y}{2}} \right| dt, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi(p+1)} \int_y^{2y} \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t+y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t+y)}{\sin^2 \frac{t+y}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t-y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t-y)}{\sin^2 \frac{t-y}{2}} \right| dt, \\ I_3 &= \frac{1}{2\pi(p+1)} \int_{2y}^\pi \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t+y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t+y)}{\sin^2 \frac{t+y}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(t-y) \cdot \sin \frac{p+1}{2}(t-y)}{\sin^2 \frac{t-y}{2}} \right| dt \end{aligned}$$

и пользуемся соотношением

$$\frac{1}{p+1} \int_0^a \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}t \cdot \sin \frac{p+1}{2}t}{t^2} \right| dt = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+na}{1+(p+1)a} + O(1), \quad (10)$$

которое имеет место равномерно относительно всех $a \geq 0$, n и p ($0 \leq p \leq n$), так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \int_0^a \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{2} t \cdot \sin \frac{p+1}{2} t \right|}{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{(p+1)a}{2}} \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{p+1} t \cdot \sin t \right|}{t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{(p+1)a}{2}} \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{p+1} t \right|}{t} dt + O(1), \\ \int_0^{\frac{(p+1)a}{2}} \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{p+1} t \cdot \sin t \right|}{t^2} dt &= O(1), \\ \frac{\frac{(p+1)a}{2}}{1+(p+1)\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{(p+1)a}{2}} \frac{\left| \sin tx \right|}{x} dx &= \frac{2}{\pi} \ln(1+lb) + O(1). \end{aligned}$$

В силу (10), благодаря ограниченности функции $\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}$ при $0 \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$, имеем

$$I_1 = \frac{2}{\pi(p+1)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{2} t \cdot \sin \frac{p+1}{2} t \right|}{t^2} dt + O(1) = \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{1+ny}{1+(p+1)y} + O(1). \quad (11)$$

Аналогично получим

$$I_2 = \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{1+ny}{1+(p+1)y} + O(1). \quad (12)$$

Для оценки интеграла I_3 заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \int_{2y}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{p+1}{2} (t \pm y)}{(t \pm y)^2} - \frac{\sin \frac{p+1}{2} t \cdot \cos \frac{p+1}{2} y}{t^2} \right| dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{2y}^{\pi} \left\{ \frac{t}{(t \pm y)^2} - \frac{1}{t} \right\} dt \right| + \frac{y}{2} \int_{2y}^{\pi} \frac{dt}{(t \pm y)^2} = O(1). \end{aligned} \quad (13)$$

Пользуясь неравенством (13), находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{\pi(p+1)} \int_{2y}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2} (t+y) \cdot \sin \frac{p+1}{2} (t+y)}{(t+y)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2} (t-y) \cdot \sin \frac{p+1}{2} (t-y)}{(t-y)^2} \right| dt + O(1) = \\ &= \frac{2}{\pi(p+1)} \int_{2y}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2} (t+y) \cdot \sin \frac{p+1}{2} t \cdot \cos \frac{p+1}{2} y}{t^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2} (t-y) \cdot \sin \frac{p+1}{2} t \cdot \cos \frac{p+1}{2} y}{t^2} \right| dt + O(1) = \\ &= \frac{4}{\pi(p+1)} \left| \cos \frac{2n+1-p}{2} y \cdot \cos \frac{p+1}{2} y \right| \int_{2y}^{\pi} \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{2} t \cdot \sin \frac{p+1}{2} t \right|}{t^2} dt + O(1), \end{aligned}$$

или, учитывая (10), имеем:

$$I_3 = \frac{4}{\pi^2} \left| \cos \frac{2n+1-p}{2} y \cdot \cos \frac{p+1}{2} y \right| \ln \frac{y + \frac{1}{p+1}}{y + \frac{1}{n}} + O(1) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} |\cos ny| \ln \frac{y + \frac{1}{p+1}}{y + \frac{1}{n}} + O(1). \quad (14)$$

Таким образом, из (11), (12) и (14) убеждаемся в справедливости теоремы.

Заметим, что полученная оценка содержит (5) и (6) как частные случаи.

Отметим здесь, что, пользуясь тем же методом, можно получить асимптотическую оценку интеграла более общего типа, чем (8):

$$\frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-1}^1 \left| \sum_{v=0}^p \left\{ 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-v} \cos(kv + \frac{r\pi}{2}) \right\} \cos k \arccos t \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left\{ \pi r \sin \frac{r\pi}{2} + 2 \cos \frac{r\pi}{2} \right\} \ln \frac{1+ny}{1+(p+1)y} + \frac{2}{\pi} \ln [1+(p+1)y] +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2} \left| \cos \left(ny + \frac{r\pi}{2} \right) \right| \ln \frac{y + \frac{1}{p+1}}{y + \frac{1}{n}} + O(1), \quad (15)$$

где $0 \leq p \leq n$, $0 \leq r \leq 1$ и $O(1)$ равномерно ограничено относительно y и p .

Легко видеть, что (15) содержит (7) при $r=0$.

Укажем также на вытекающее из доказанной теоремы следствие.

Следствие. Для ограниченности функции $L_{n,p}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\arccos x = \arccos x_n = \frac{K\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \ln \frac{n}{p+1}}\right),$$

где K — целочисленная функция от n , принимающая конечное число нечетных значений, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n и p .

Считаю своим долгом выразить благодарность проф. А. Ф. Тиману, предложившему мне настоящую задачу, за внимание к моей работе.

Днепропетровский
государственный университет

Поступило
22 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ch. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919. ² С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 509 (1940). ³ А. Ф. Тиман, ДАН, 61, № 6, 989 (1948). ⁴ А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 1, 85 (1950).