

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ ЗАОСТРЕНИЯ ВЕРШИН ВОЛН

В прошлом году нами была сделана первая попытка ⁽¹⁾ объяснить заостренную форму вершин ветровых волн. В статье молчаливо принималось, что скорость дрейфового течения постоянна на протяжении оси x и во времени. При таком допущении выходило, что для удовлетворения формальных условий ⁽²⁾ необходимо считать угловую скорость ω обращения частиц колеблющейся во времени около среднего значения $2\pi/T$ (наибольшей при вершинах и наименьшей у подошв волн). Однако этот вывод, не противоречивший кажущейся картине движения в бассейне, оказался несостоятельным в свете дальнейших наших исследований по вопросу о питании волн энергией ветра ⁽²⁾ и вопросу нарастания длины волн ⁽³⁾: условия для потенциальной энергии и момента количества движения не совместимы с колебанием ω в пределах одного периода T . С другой стороны, при больших значениях h/λ даже без воздействия ветра волны могут принимать форму, отличающуюся от трохойды.

Значит, надо искать иную схему для перехода от вспомогательного эллипса ⁽¹⁾ с полуосями a , b к действительной орбите: окружности радиуса $r_0 = b$ для поверхностных частиц. Неоспоримые геометрические соотношения рис. 3 в цитированной статье ⁽¹⁾ остаются в силе, невзирая на то, что теперь мы задаемся новым условием

$$\omega = \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}$$

Для получения прежнего типичного профиля ветровой волны теперь будет необходимо считать скорость переносного движения непостоянной, колеблющейся на протяжении длины волны. Действительно, представим себе, что скорость течения, сопутствующего волнам, складывается из постоянной величины u_0 и величины u , колеблющейся на протяжении λ . Угол поворота θ будем отсчитывать от нижней части координатной оси Y . Тогда вместо уравнения (8) статьи ⁽¹⁾ придется записать иное:

$$\int_0^t (c + u_0 + u) dt = R\theta + (a - b) \sin \theta; \quad (1)$$

продифференцировав его по времени t , получим:

$$(c + u_0) + u = R \frac{d\theta}{dt} + (a - b) \cos \theta \frac{d\theta}{dt}. \quad (2)$$

Здесь попрежнему R обозначает так называемый радиус круга качения, связанный с длиной волн ($R = \lambda/2\pi$). Величина $d\theta/dt = \omega$ в новой схеме постоянна. С другой стороны, как легко видеть,

$$c + u_0 = R\omega. \quad (3)$$

Следовательно,

$$u + \omega(a - b) \cos \theta. \quad (4)$$

Итак, прежний профиль ветровой волны может возникнуть при постоянной величине ω и переменной скорости переносного движения.

Попытаемся сейчас теоретически обнаружить причину колебания скорости переносного движения, начав исследование с простейшего случая: с волны, распространяющейся при отсутствии ветра.

Выделим горизонтальный слой воды, верхней границей которого в состоянии покоя является поверхность моря, а нижней — плоскость, отстоящая от нее вниз на весьма малое расстояние y . Во время волнения частицы, лежащие на этих плоскостях, станут описывать окружности, изображенные на рис. 1 настоящей статьи. В связи с этим при отходе частиц от начала отсчета на угол θ толщина слоя y превращается в переменную величину η , которую с достаточным приближением можно выразить так:

$$\eta = y - (r_0 - r) \cos \theta = y - r_0(1 - e^{-y/R}) \cos \theta \approx y \left(1 - \frac{r_0}{R} \cos \theta\right). \quad (5)$$

Именно по такой причине выделенный слой, как известно, становится утолщенным близ вершин и утоньшенным близ подошв.

Вырежем полосу единичной ширины вдоль направления распространения волн. Тогда при угловой скорости орбитального движения ω в «единичном канале» с поперечным сечением $1 \times \eta$ будет проходить поток Φ_θ :

$$\Phi_\theta = \omega r_0 y \left(1 - \frac{r_0}{R} \cos \theta\right). \quad (6)$$

При изменениях θ от π до 2π будет непрерывно уменьшаться число частиц между крайними. Поэтому, в соответствии с условием неразрывности, часть воды будет вынуждена переходить из орбитального движения в поступательное, направленное в сторону распространения волн. При изменениях θ от 0 до π вода будет как бы «подсасываться» сзади, следуя в том же горизонтальном направлении.

Дадим углу θ приращение $d\theta$. Тогда Φ_θ испытает изменение $d\Phi$, которое найдем, взяв дифференциал от обеих частей уравнения (6):

$$d\Phi = \omega \frac{r_0^2}{R} y \sin \theta d\theta. \quad (7)$$

От этого изменения потока Φ перейдем к изменению скорости w поступательного движения вод, разделив $d\Phi$ на переменную площадь поперечного сечения η и изменив знак на обратный, поскольку w возрастает благодаря убыванию Φ :

$$dw = -\omega \frac{r_0^2}{R} \frac{\sin \theta}{1 - \frac{r_0}{R} \cos \theta} d\theta. \quad (8)$$

Проинтегрировав (8), найдем выражение для скорости w :

$$w = -\omega r_0 \ln \left(1 - \frac{r_0}{R} \cos \theta\right) + N \approx \omega \frac{r_0^2}{R} \cos \theta + N. \quad (9)$$

Остальными членами ряда при разложении логарифма пренебрегаем, делая ошибку менее 10% при не слишком больших значениях r_0/R . При вершине волн «орбитальный» поток идет сквозь наибольшее возможное поперечное сечение; следовательно, поступательное компенсационное течение здесь приостанавливается.

В связи с этим, подставив в (9) частное значение $\theta = \pi$, запишем:

$$-\omega \frac{r_0^2}{R} + N = 0. \text{ Следовательно,}$$

$$\overline{w} = \omega \frac{r_0^2}{R} (1 + \cos \theta). \quad (10)$$

Итак, скорость поступательного движения вод действительно колеблется на протяжении длины волны. На основании (10) осредненное значение этой скорости $\overline{w}$ равно величине, которую еще в прошлом веке определили гидродинамисты чисто формальным методом и которую до настоящего времени считали постоянной:

$$\overline{w} = \omega \frac{r_0^2}{R} = r_0^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 c. \quad (11)$$

Здесь через c обозначена фазовая скорость волн на неподвижной воде. На время предположим, что скорость поступательного движения одинакова на всех глубинах. Тогда в уравнении (3) можно будет считать $u_0 = \omega r_0^2/R$, а на основании (4) и (10) можно будет записать для переменной составляющей:

$$\omega(a-b) \cos \theta = \omega \frac{r_0^2}{R} \cos \theta. \quad (12)$$

Разделим левую часть (12) на $\omega b \cos \theta$, а правую на равную величину $\omega r_0^2 \cos \theta$. Тогда окажется после преобразований:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_0}{R}. \quad (13)$$

Как видно, даже при отсутствии ветра профиль волн должен отличаться от трохоиды, и тем сильнее, чем больше отношение r_0/R .

Необходимо отметить, что в действительности скорость поступательного движения, найденная нами для поверхностных частиц, уменьшается на глубинах по тому же экспоненциальному закону, по какому уменьшаются квадраты радиуса орбиты. По этой причине скорость переносного движения, налагающаяся на фазовую скорость волн c , должна быть меньше величины, записанной в (10). Известно, что скорость волн конечной амплитуды отличается от фазовой скорости бесконечно низких волн на величину, составляющую ровно половину от $\overline{w}$ в (11). Поэтому уместно будет ожидать, что и в общем выражении (10) скорости переносного движения появляется поправочный множитель $1/2$. Однако величина этого поправочного множителя практически никак не отражается на форме профиля волн. Действительно, пусть он равен какой-то правильной дроби β . Тогда скорость переносного движения, налагающаяся на фазовую скорость волн, будет $\beta \overline{w}$, где $\overline{w}$ выражается формулой (10). Одновременно возникает остаточная скорость $(1 - \beta) \overline{w}$, которая будет арифметически складываться с орбитальной скоростью ωr_0 у вершин волн и арифметически вычитаться из нее у подошвы. В результате возникает смешанная задача: будет меняться во времени и скорость переносного движения (по нашей второй схеме) и кажущимся образом будет меняться скорость орбитального движения (аналогично нашей первой схеме). Легко доказать, что нет надобности решать такую осложненную задачу, а достаточно учесть оба явления, введя в кинематические условия полную величину $\overline{w}$ из (10).

В законности подобных действий убеждает построение профиля так называемой «предельно-крутой» волны, основанное на (10) и на представлении о постоянной угловой скорости ω . Не приводя его здесь, ограничимся лишь приближенным подсчетом величины a/b по (13), внося туда числовое значение r_0/R , которое заимствуем из материала статьи (1). Соответственно $h/\lambda = 0,143$, положим $r_0/R = 0,45$. Тогда по (13) окажется $a/b = 1,45$. Между тем, в цитированной статье, мы получили для волны, близкой к теоретическому профилю наибольшей крутизны, $a/b = 1,56$. Различие между этими значениями составляет всего лишь 7%.

Теперь исследуем профиль ветровой волны, неразрывно связанной с наличием дрейфового течения. Обозначим через u скорость дрейфового течения, осредненную на протяжении длины волны. Вопреки установившимся представлением, мгновенные значения u будут колебаться около $\bar{u}$, в соответствии с условием неразрывности

$$u\eta = \bar{u}u. \quad (14)$$

Подстановка выражения η из (5) в (14) дает

$$u = \frac{\bar{u}}{1 - \frac{r_0}{R} \cos \theta}. \quad (15)$$

Подобно (9), упростим и это соотношение, внося некоторую небольшую погрешность; с точностью до величин первого порядка запишем:

$$u \approx \bar{u} \left(1 + \frac{r_0}{R} \cos \theta \right). \quad (16)$$

Теперь в уравнении (3) надо будет учесть обе части постоянной составляющей течения: и $\omega r_0^2/R$ и u . В уравнении (4) переменная составляющая теперь будет обусловлена и особенностями орбитального движения, описанными выше, и пульсацией дрейфового течения. Учтя и то, и другое, получим на основании (4), (10), (16):

$$\omega(a - b) = \omega \frac{r_0^2}{R} + \bar{u} \frac{r_0}{R}. \quad (17)$$

Прежним приемом преобразуем (17), причем попутно исключим ω , выразив ее через линейную скорость v орбитального движения: $\omega = v/r_0$. В результате окажется:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_0}{R} \left(1 + \frac{\bar{u}}{v} \right). \quad (18)$$

Столь же просто, но менее точно решается обратная задача: по фотографии профиля волн может быть (посредством формулы (2) из статьи (1)) определено отношение a/b . Подставив найденное значение a/b в уравнение

$$\frac{\bar{u}}{v} = \frac{R}{r_0} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) - 1, \quad (19)$$

вытекающее из (18), найдем скорость $\bar{u}$ дрейфового течения*.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
12 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Шулейкин, ДАН, 93, № 2, 265 (1954). ² В. В. Шулейкин, ДАН, 94, № 4, 677 (1954). ³ В. В. Шулейкин, ДАН, 94, № 6, 1049 (1954).

* Точнее — проекцию скорости течения на направление движения ветровых волн.