

И. С. ШАПИРО

О ЧЕТНОСТИ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ПАРА- И ОРТО-СОСТОЯНИЙ

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 18 I 1954)

Известно, что волновые функции пара- и орто-позитрония (состояния 1S_0 и 3S_1) являются по своим трансформационным свойствам, соответственно, псевдоскаляром и вектором (см., например, (1)). В данной заметке показывается, что отмеченные выше трансформационные свойства имеют место вообще для S -состояний любых спинорных частиц, волновые функции которых преобразуются одинаково* при вращениях и инверсии трехмерного пространства по представлению

$$\hat{T}^2 = -1, \quad (1)$$

где $\hat{T}$ — матрица, соответствующая инверсии трех пространственных осей (2, 3).

Рассмотрим вращение

$$\mathbf{x}' = \hat{s} \mathbf{x} \quad (2)$$

пространственных осей координат. Четырехкомпонентная волновая функция $U(\mathbf{x})$ частицы со спином $1/2$ преобразуются при этом по закону

$$U(\mathbf{x}) \rightarrow U'(\mathbf{x}') = \hat{S} U(\hat{s}^{-1} \mathbf{x}') = \hat{S} \bar{U}(\mathbf{x}'), \quad (3)$$

причем $\hat{S}$ есть четырехрядная матрица спинорного представления группы вращений. Преобразование (3) является фактически произведением двух преобразований $U(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{S} U(\mathbf{x})$, $U(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{U}(\mathbf{x}')$ и может быть поэтому записано в виде

$$U'(\mathbf{x}') = \hat{S} \hat{P} U(\mathbf{x}) = \hat{P} \hat{S} U(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\hat{P} u_\rho(\mathbf{x}) = \bar{u}_\rho(\mathbf{x}') \quad (4a)$$

($\rho = 1, 2, 3, 4$). Дираковский спинор $U = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \chi \end{Bmatrix}$ приводим в отношении преобразований $\hat{S}$ и распадается на два двухкомпонентных спинора $\varphi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и $\chi = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$, так что

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Двухрядные матрицы $\hat{\Sigma}$ в (5) принадлежат неприводимому представлению группы вращений $D_{1/2}$. Если кроме вращений (2) включить в рассмотрение также и инверсию осей, то, поскольку мы имеем дело с одновременным преобразованием двух спиноров (φ и χ), следует,

* Мы называем два спинора преобразующимися одинаково, если матрицы преобразования тождественны. В связи с двухзначностью спинорных представлений подчеркнем, что матрицы преобразований двух спиноров, преобразующихся по одному и тому же представлению, необязательно тождественны, но могут различаться знаками.

вообще говоря, различать представления $D_{j_1}^+$ и $D_{j_1}^-$, отличающиеся знаками матриц, соответствующих отражениям. Для инверсии осей имеем:

$$U'(\mathbf{x}') = \hat{T} \hat{R} U(\mathbf{x}) = \hat{R} \hat{T} U(\mathbf{x}); \quad (6)$$

$$\hat{R} u_\rho(\mathbf{x}) = u_\rho(\mathbf{x}'), \quad (6a)$$

Удовлетворяющая уравнению (1) матрица $\hat{T}$ равна $\pm i\gamma_4$ ($\gamma_4^2 = 1$). Выбрав, как обычно, γ_4 диагональной, найдем:

$$\hat{T} U(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \pm i\varphi(\mathbf{x}) \\ \mp i\chi(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, если спинор φ преобразуется по представлению $D_{j_1}^+$, то для χ имеет место представление $D_{j_1}^-$. В случае, когда $U(\mathbf{x})$ есть волновая функция частицы с данным моментом j , компоненты $u_\rho(\mathbf{x})$ преобразуются при преобразованиях (4a), (6a) по неприводимому представлению D_l^+ группы трехмерных вращений и отражений, причем, если для компонент φ $l = j - 1/2$, то для компонент χ $l = j + 1/2$. Из изложенного следует, что при преобразованиях (3), (6) спиноры φ , χ преобразуются по неприводимым представлениям D_j , содержащимся в прямых произведениях $D_{j-1/2}^+ \times D_{1/2}^+$ и $D_{j+1/2}^+ \times D_{1/2}^-$. Разложив эти прямые произведения на неприводимые части, получим:

$$D_{j-1/2}^+ \times D_{1/2}^+ = D_j^+ + D_{j-1}^-, \quad (8)$$

$$D_{j+1/2}^+ \times D_{1/2}^- = D_{j+1}^- + D_j^+.$$

Из уравнений (8) видно, что оба спинора φ и χ преобразуются по одному и тому же представлению D_j^+ . Рассмотрим теперь систему из двух спинорных частиц с моментами j_1 , j_2 . Если полный момент системы есть J , то ее волновая функция будет преобразовываться при вращении и отражениях трехмерного пространства по одному из неприводимых представлений D_J , содержащемуся в прямых произведениях представлений, по которым преобразуются неприводимые части φ и χ волновых функций каждой из частиц. Как выяснено выше, неприводимые представления, по которым преобразуются φ и χ , одинаковы. Кроме того, мы предполагаем тождественность трансформационных свойств волновых функций обеих частиц. Поэтому искомое неприводимое представление D_J содержится в прямом произведении $D_{j_1}^+ \times D_{j_2}^+$:

$$D_{j_1}^+ \times D_{j_2}^+ = D_{j_1+j_2}^+ + D_{j_1+j_2-1}^- + \dots + D_J^{(-)j_1+j_2-J} + \dots + D_{|j_1-j_2|}^+ *. \quad (9)$$

Знак при символе D_J в правой части уравнения (9) связан с четностью ξ волновой функции системы соотношением

$$(-)^{j_1+j_2-J} = (-)^J \xi. \quad [(10)]$$

При $j_1 = j_2 = 1/2$, $J = 0$ получаем из уравнения (9)

$$D_J^{(-)j_1+j_2-J} = D_0^-, \quad (11)$$

т. е. волновая функция является псевдоскаляром. Если при тех же условиях $J = 1$, то

$$D_J^{(-)j_1+j_2-J} = D_1^+, \quad (12)$$

* Уравнение (9) справедливо только для представлений (1). В случае представления $\hat{T}^2 = +1$ знаки при символах D в правой части уравнения (9) следует изменить на обратные.

так что, согласно (10), волновая функция оказывается вектором. Уравнениями (11), (12) в общей форме доказано утверждение, сформулированное в начале статьи.

Отметим, что в справедливости высказанных утверждений можно также убедиться нестрогим, но элементарным путем, рассмотрев, например, билинейные формы

$$U_1 \gamma_1 \gamma_3 U_2; \quad (13a)$$

$$U_1 \gamma_4 \gamma_2 U_2, \quad (136)$$

являющиеся в случае представления (1), соответственно, псевдоскаляром и скаляром. Положив импульсы обеих частиц равными нулю, сразу же найдем, что скаляр (136) обращается в нуль, тогда как псевдоскаляр (13a) отличен от нуля, если $J=0$. Для представления $\hat{T}^2 = +1$ величина (13a) становится скаляром, а (136) — псевдоскаляром. В этом случае волновая функция пара-состояния оказывается скаляром. Пользуясь сноской на стр. 976 и уравнением (9), нетрудно также установить, что волновая функция орто-состояния является псевдовектором. Такое же положение будет иметь место и для представления (1), если знаки матриц, преобразующих U_1 и U_2 при инверсии осей, различны.

Из полученных результатов следует, в частности, что нечетность S -состояний позитрония свидетельствует о тождественности матриц преобразований волновых функций электрона и позитрона, если реализуется представление (1), и о различии знаков этих матриц, если осуществляется представление $\hat{T}^2 = +1$. Стоит заметить, что такой же вывод автоматически следует из непосредственного рассмотрения волновых функций электрона и позитрона. Как известно, волновые функции частицы U_+ и «античастицы» U_- связаны соотношением

$$U_- = \pm \hat{C} U_+^*,$$

где звездочка означает комплексное сопряжение и $\hat{C}$ — унитарная матрица, которая при обычном выборе дираковских матриц γ_μ может быть отождествлена с γ_2 (3,4). При инверсии осей для представления (1) имеем

$$\begin{aligned} U_+ &\rightarrow U'_+ = \pm i \gamma_4 U_+, \\ U_- &\rightarrow U'_- = \pm i \gamma_4 \hat{C} U_+^* = \pm i \gamma_4 U_-, \end{aligned}$$

тогда как для случая $\hat{T}^2 = +1$ находим:

$$\begin{aligned} U_+ &\rightarrow U'_+ = \pm \gamma_4 U_+, \\ U_+ &\rightarrow U'_- = \mp \gamma_4 \hat{C} U_+^* = \pm \gamma_4 U_-. \end{aligned}$$

В заключение укажем, что установление четности пара- и орто-состояний других систем является одним из средств выявления природы различных спинорных частиц.

Московский государственный
университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ, 21, 93 (1951). ² Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ, 20, 493 (1950). ³ И. С. Шапиро, ЖЭТФ, 22, 524 (1952). ⁴ В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, М., 1947.