

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Г. А. ГРИНБЕРГ, Н. Н. ЛЕБЕДЕВ, И. П. СКАЛЬСКАЯ
и Я. С. УФЛЯНД

ВОЛНОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛА

1. В настоящей работе дается строгое решение задачи об установившихся электромагнитных колебаниях, вызванных линейным источником, помещенным внутри идеально проводящего экрана, имеющего форму параболического цилиндра.

На первый взгляд рассматриваемая проблема представляется тривиальной, так как она приводится к краевой задаче для уравнения Гельмгольца, изученной в ряде работ ⁽¹⁻⁴⁾. Подобная точка зрения является, однако, ошибочной, поскольку критическое рассмотрение результатов этих работ показывает, что они не дают полного решения задачи, и полученные в них формулы не могут считаться обоснованными без дополнительного исследования. В работах Эпштейна ^(1, 2) автором путем разделения переменных в параболической системе координат построена совокупность частных решений уравнения Гельмгольца, позволяющая рассмотреть некоторые краевые задачи, связанные с параболическим цилиндром. Однако задача об электромагнитном поле линейного излучателя и вообще краевая задача с произвольными граничными условиями, заданными на поверхности цилиндра, не допускает решения в рядах Эпштейна, так как эти ряды сходятся лишь в части области, ограниченной цилиндром. В основе этого обстоятельства, которое, повидимому, не было отмечено с достаточной отчетливостью в литературе, лежит невозможность распространения известной теоремы о разложении произвольных функций в ряды по функциям Эрмита вещественного аргумента на соответствующие ряды комплексного аргумента, встречающиеся при рассмотрении данной проблемы. В силу сказанного построенные Эпштейном совокупности решений уравнения Гельмгольца непригодны для решения рассматриваемых краевых задач, за исключением совершенно специальных частных случаев *. Правильный путь подхода к проблеме был указан Магнусом, который в работе ⁽³⁾ показал, что рассматриваемая проблема принадлежит к классу задач с непрерывным спектром, и ее решение получается в виде комплексного интеграла, образованного из соответствующих частных решений уравнения Гельмгольца путем интегрирования по параметру. К сожалению, эта работа не получила своего завершения, а именно, в ней не было доказано, что найденное решение удовлетворяет принципу излучения, без чего анализ не может считаться исчерпывающим. В работе ⁽⁴⁾, посвященной рассмотрению задачи, указанной в заголовке настоящей статьи, автор, по не вполне ясным мотивам, отказывается от ранее намеченного им, теоретически правильного пути решения проблемы и строит последнее в форме комплексного интеграла другого вида, чем первоначальный. Данная в этой работе проверка того, что полученное выражение удовлетворяет всем условиям

* К которым относится, в частности, решенная Эпштейном задача о дифракции плоской волны, падающей на проводящий параболический экран.

задачи, не является убедительной, так как в ней отсутствует доказательство регулярности вторичного поля в смежности с фокусной линией. Этот пробел ставит под сомнение справедливость полученных результатов, так как частные решения уравнения Гельмгольца, входящие в подинтегральное выражение, не являются регулярными вблизи линии фокусов *. Детальный анализ строгого решения задачи, данного в настоящей статье, показывает, что формула Магнуса, как и некоторые формулы, содержащие ряды эпштейновского типа, верны лишь для ограниченной части области внутри параболического цилиндра. Однако этот вывод следует исключительно из сопоставления указанных формул с данным ниже решением и не может быть сделан заранее.

2. Переходя к изложению основных результатов настоящей работы, выберем систему координат (x, y, z) , ось x которой лежит в плоскости симметрии параболического цилиндра, а ось z совпадает с линией фокусов, и предположим, что линейный источник электромагнитных колебаний расположен по оси z **. Математическая формулировка задачи заключается в следующем: найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

регулярное внутри параболического цилиндра $r = x + 2a$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$), за исключением линии $x = y = 0$, в смежности с которой

$$u = -\frac{\pi \omega I}{c^2} H_0^{(2)}(kr) + \text{регулярная функция}, \quad (2)$$

обращающееся в нуль на поверхности цилиндра и удовлетворяющее условию излучения

$$u \Big|_{r \rightarrow \infty} = O(r^{-1/4}); \quad r^{1/4} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Здесь I — сила тока в источнике, ω — частота колебаний, $k = \omega/c$ — волновое число, u — комплексная амплитуда искомого электрического поля, $H_0^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля второго рода.

Если ввести систему параболических координат (α, β) , определяемых равенствами $x = \frac{1}{2}(a^2 - \beta^2)$, $y = a\beta$ ($-\infty < \alpha < \infty$, $0 \leq \beta < \infty$), и выполнить разделение переменных, то легко показать, что совокупность частных решений уравнения (1), регулярных внутри параболического цилиндра ($0 \leq \beta \leq \beta_0 = \sqrt{2a}$) и удовлетворяющих принципу излучения, будет

$$u_v \equiv u_v(\alpha, \beta) = M_v A_v^{(1)}(\alpha) B_v^{(1)}(\beta), \quad (4)$$

$$A_v^{(1)}(\alpha) = B_{-v-1}^{(1)}(\alpha) = e^{-1/2 i k \alpha^2} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}, i k \alpha^2\right),$$

где $F(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; M_v — произвольная функция параметра v , причем должно быть $-1/2 < \text{Re}(v) < 0$. Искомое решение u представляется в виде суммы поля источника и вторичного поля, полученного интегрированием выражения (4) вдоль прямой $\text{Re}(v) = -\delta$, $0 < \delta < 1/2$. Значение коэффициента M_v определяется путем разложения первичного поля в интеграл по функциям $A_v^{(1)}(\alpha)$, для чего может быть использована принадлежащая Магнусу (3) теорема разложения, и приравнивания нулю суммарного поля на поверхности цилиндра. Окончательно находим:

$$u = -\frac{\pi \omega I}{c^2} H_0^{(2)}(kr) + \frac{\omega I}{2\pi V \pi c^2} \int_{-\delta - i\infty}^{-\delta + i\infty} \Gamma\left(-\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) e^{\frac{i\pi v}{2}} \times \\ \times [B_v^{(3)}(\beta_0) / B_v^{(1)}(\beta_0)] B_v^{(1)}(\beta) A_v^{(1)}(\alpha) dv, \quad (5)$$

* В рассматриваемом случае их градиент неограниченно возрастает при приближении к фокусу.

*** Случай произвольного расположения источника может быть рассмотрен аналогичным образом.

где

$$B_{\nu}^{(3)}(\beta) = (ik\beta^2)^{-1/4} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) W_{-\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{5}}(ik\beta^2),$$

$W_{\lambda, \mu}(z)$ — функция Уиттекера.

Можно показать, что полученное формальное решение удовлетворяет всем условиям задачи. Наиболее трудным этапом доказательства является проверка выполнения условия излучения, основанная на некоторых специальных оценках гипергеометрических функций, входящих в выражение (5).

3. Если дополнить путь интегрирования вправо дугой бесконечно большого круга, то при $|\alpha| < \beta$ интеграл вычисляется при помощи теоремы о вычетах*. Мы получим тогда

$$u = -\frac{\pi\omega I}{c^2} H_0^{(2)}(kr) + \frac{2\omega I}{\sqrt{\pi} c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} [B_{2n}^{(3)}(\beta_0)/B_{2n}^{(1)}(\beta_0)] B_{2n}^{(1)}(\beta) A_{2n}^{(1)}(\alpha), \quad |\alpha| < \beta. \quad (6)$$

Функции $A_{2n}^{(1)}(\alpha)$ просто связаны с полиномами Эрмита, а именно:

$$A_{2n}^{(1)}(\alpha) = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} e^{-1/2 ik\alpha^2} H_{2n}(\sqrt{ik}\alpha). \quad (7)$$

Рядов аналогичного типа, пригодных для представления решения в области $|\alpha| > \beta$, не существует. Поэтому решение не может быть представлено во всей области $0 \leq \beta \leq \beta_0$ в виде ряда по полиномам Эрмита.

4. Решение задачи, полученное Магнусом⁽⁴⁾, имеет в наших обозначениях вид:

$$u = -\frac{\pi\omega I}{c_0} H_0^{(2)}(kr) + \frac{\omega I}{2\pi c^2} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} [B_{\nu}^{(3)}(\beta_0)/B_{\nu}^{(1)}(\beta_0)] B_{\nu}^{(1)}(\beta) A_{\nu}^{(3)}(|\alpha|) d\nu, \quad |\alpha| > 0, \quad (8)$$

где $A_{\nu}^{(3)}(\alpha) = B_{\nu-1}^{(3)}(\alpha)$. Функция u , определяемая выражением (8), представляет собой решение уравнения (1), регулярное внутри параболического цилиндра с разрезом вдоль полуплоскости $x \geq 0$ и обращаемое в нуль на поверхности цилиндра. Если $|\alpha| < \beta$, то интеграл, входящий в (8), может быть вычислен по теореме о вычетах, что приводит к формуле (6). Этот результат показывает, что функция u , построенная Магнусом, совпадает с решением в области $|\alpha| < \beta$; следовательно, в силу известных свойств решений уравнений эллиптического типа, она тождественна с решением задачи во всей области, где u регулярна.

Ленинградский физико-технический
институт
Академии наук СССР

Поступило
12 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. S. Epstein, Dissertation, München, 1914. ² Encyklopädie der Math. Wissensch., 5, 3, S. 511. ³ W. Magnus, Jahresber. Deutsch Math. Ver., 50, 140 (1940). ⁴ W. Magnus, Zs. f. Phys., 118, 343 (1941).

* Можно показать, что функция $B_{\nu}^{(1)}(\beta_0)$ не имеет корней в области $\text{Re}(\nu) > -1/2$; поэтому особыми точками подинтегральной функции внутри контура являются лишь полюса гамма-функции $\nu = 2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).