

А. Х. МИРЗАДЖАНЗАДЕ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 22 I 1954)

Решению задач нестационарного движения вязко-пластичного тела посвящен ряд работ (1-7). В настоящей статье рассматривается нестационарное движение вязко-пластичной жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения. В этом случае

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0.$$

Из уравнения неразрывности следует, что

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

При этом основные дифференциальные уравнения движения вязко-пластичной жидкости (1, 8-10) примут вид:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\tau_0}{r} - \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0. \quad (2)$$

Из (2) видно, что P зависит только от z и t .

В уравнении (1) левая часть не зависит от r , а правая часть не зависит от z . Таким образом, левая и правая части являются функциями одного только t . Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial z} = f(t). \quad (3)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $f(t) = 0$; тогда уравнение (1) примет вид:

$$\eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\tau_0}{r} = \frac{\partial v}{\partial t} \rho. \quad (4)$$

Полученное уравнение (4) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа.

Будем считать распределение скоростей в начальный момент известным, тогда начальное условие будет:

$$v(r, 0) = F\left(\frac{r}{R}\right). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь, каким образом должны формулироваться краевые условия при движении вязко-пластичной жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения.

Как известно, при движении вязко-пластичной жидкости в трубе, наряду с вязко-пластичной областью течения имеется область пластичного течения. Уравнение (1), так же как и основные дифференциальные уравнения движения, описывает лишь вязко-пластичную

область течения. Поэтому при решении задачи о стационарном движении вязко-пластичной жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения ⁽¹⁰⁾ мы краевое условие задавали исходя из того, что в области пластичного течения скорость движения с определенным приближением можно принять постоянной, т. е. $\partial v / \partial r = 0$; радиус ядра (ядро — область пластического течения) $r_0 = 2l\tau_0 / P$.

Следует отметить, что Н. В. Тябин ⁽¹¹⁾ при определении произвольных постоянных пользуется условием ограниченности скорости движения на оси трубы, т. е. считает, что как дифференциальное уравнение, так и полученное решение охватывают всю область движения. Очевидно, это противоречит физике явления. В самом деле, скорость при стационарном движении вязко-пластичной жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения может быть определена из выражения

$$v = \frac{P}{4l\eta} (R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\eta} (R - r). \quad (6)$$

Из этого выражения для скорости следует, что при $r = r_0 = 2l\tau_0 / P$ скорость имеет максимум и при значениях $R / r_0 < 2$ скорость на оси трубы отрицательна, что противоречит физике явления.

Исходя из вышеизложенного и принимая, что радиус ядра не будет зависеть от времени, краевые условия запишем так:

$$v(R, t) = 0, \quad \frac{\partial v(r_0, t)}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде разложения в ряд по функциям $Y_0(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)$:

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \left[Y_0(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right], \quad (8)$$

где $J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. $Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)$ — функция Неймана — Бесселя второго рода нулевого порядка.

Как известно ⁽¹²⁾, асимптотические формулы для собственных функций позволяют доказать, что разложение по собственным функциям сходится при тех же условиях, что и разложение в ряд Фурье по косинусам.

Так как функция $\tau_0 / \rho r$ удовлетворяет условиям Дирихле на интервале (r_0, R) , то ее ряд Фурье сходится при всех значениях r к ней ⁽¹⁵⁾.

На основании вышеизложенного разложим τ_0 / r , $r_0 \leq r \leq R$, в ряд по функциям $Y_0(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)$:

$$\frac{\tau_0}{\rho r} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[Y_0(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right]; \quad (9)$$

$$a_n = \frac{\tau_0}{H_n R^2 \rho} \int_{r_0/R}^1 \left[Y_0(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right] dr; \quad (10)$$

$$H_n = \frac{1}{R^2} \int_{r_0/R}^1 r \left[Y_0(\alpha_n)J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n)Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right]^2 dr. \quad (11)$$

Используя краевое условие $\partial v(r_0, t)/\partial r = 0$, получим характеристическое уравнение для определения α_n :

$$J_1\left(\alpha_n \frac{r_0}{R}\right) Y_0(\alpha_n) - J_0(\alpha_n) Y_1\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) = 0.$$

Формула для определения α_n при значениях r_0/R , близких к 1, приведена в монографии С. М. Тарга⁽¹⁴⁾.

Подставив (8) и τ_0/r из (9) в (4), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right] \left[-\gamma \frac{\alpha_n^2}{R^2 \rho} v_n(t) - v_n'(t) - a_n \right] = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$v_n'(t) + \frac{\alpha_n^2}{R^2 \rho} \gamma v_n(t) + a_n = 0. \quad (13)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (13), получим:

$$v_n(t) = C_n' e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2 \rho} \gamma t} - \frac{a_n R^2 \rho}{\alpha_n^2 \eta}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (8), получим:

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n' e^{-\frac{\alpha_n^2}{R^2 \rho} \gamma t} - \frac{a_n R^2 \rho}{\alpha_n^2 \eta} \right) \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right].$$

Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$v(r, 0) = F\left(\frac{r}{R}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n' - \frac{a_n R^2 \rho}{\alpha_n^2 \eta} \right) \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right], \quad (15)$$

т. е. $C_n' - \frac{a_n R^2 \rho}{\alpha_n^2 \eta}$ являются коэффициентами функции $F\left(\frac{r}{R}\right)$ при разложении ее в ряд по функциям $Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right)$ на интервале (r_0, R) . Следовательно,

$$C_n' = \frac{a_n R^2 \rho}{\alpha_n^2 \eta} + \frac{1}{H_n' R^2} \int_{r_0/R}^1 r F\left(\frac{r}{R}\right) \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right] dr;$$

$$H_n' = \frac{1}{R^2} \int_{r_0/R}^1 r \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right]^2 dr.$$

В случае $\partial P/\partial z = \text{const}^*$ $r_0 = 2l\tau_0/P$ и выражения для a_n и H_n примут вид:

$$a_n = \frac{1}{H_n R^2 \rho} \int_{r_0/R}^1 \left(\tau_0 - \frac{Pr}{l} \right) \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right] dr.$$

$$H_n = \frac{1}{R^2} \int_{r_0/R}^1 r \left[Y_0(\alpha_n) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) - J_0(\alpha_n) Y_0\left(\alpha_n \frac{r}{R}\right) \right]^2 dr.$$

* Рассмотрен И. С. Громека⁽¹⁵⁾ для неустановившегося течения вязкой жидкости в круглой трубе.

Для нахождения расхода воспользуемся выражением

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^R v r dr + \pi r_0^2 v(r_0, t). \quad (16)$$

В случае $f(t) \neq 0$ введем вместо v новую функцию $\bar{v}$, положив ⁽¹⁶⁾

$$\bar{v} = v + \int_0^t f(t) dt;$$

тогда $\bar{v}$ будет удовлетворять уравнению (4). В этом случае краевые условия примут вид:

$$\bar{v}(R, t) = \mu(t) = \int_0^t f(t) dt; \quad \frac{\partial \bar{v}(2\tau_0 / f(t), t)}{\partial r} = 0.$$

Таким образом, будем иметь краевую задачу с подвижной границей.

Считаем своим долгом выразить искреннюю признательность проф. З. И. Халилову за ряд ценных указаний.

Поступило
17 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Ильюшин, Тр. конференции по пластическим деформациям, 1936.
² В. В. Соколовский, Прикладн. матем. и мех., 13, в. 6 (1949). ³ А. М. Кочетков, там же, 14, в. 2 (1950). ⁴ Ф. А. Бахшиян, там же, 12, в. 1 (1948).
⁵ И. Н. Зверев, там же, 14, в. 3 (1950). ⁶ А. Ю. Ишлинский, там же, 4, в. 1 (1940). ⁷ А. Н. Герасимов, там же, 1, в. 4 (1938). ⁸ А. А. Ильюшин, Уч. зап. МГУ, в. 39 (1940). ⁹ А. М. Гуткин, Трение и износ в машинах, 1, Изд. АН СССР, М.—Л., 1947. ¹⁰ А. Х. Мирзаджанзаде, А. Ф. Касимов, Докл. АН Азерб. ССР, 3, № 10 (1952). ¹¹ Н. В. Тябин, Колл. журн., 13, 1 (1931). ¹² Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, М.—Л., 1950. ¹³ Е. Тичмарш, Теория функций, М.—Л., 1951. ¹⁴ С. М. Тарг, Основные задачи теории ламинарных течений, М.—Л., 1951. ¹⁵ И. С. Громека, Собр. соч., Изд. АН СССР, М., 1952. ¹⁶ Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, М.—Л., 1948.