

Е. П. ПОПОВ

К ПРИБЛИЖЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ АВТОКОЛЕБАНИЙ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 20 I 1954)

Метод гармонического баланса Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова⁽¹⁾ применяется в теории автоматического регулирования⁽²⁻⁷⁾ главным образом к системам, нелинейность которых состоит в том, что в обыкновенных дифференциальных уравнениях какие-либо две переменные связаны однозначной или двужанной (гистерезисной) нелинейной зависимостью вида $x_2 = F(x_1)$. В диссертации⁽⁸⁾ и мною разными путями было дано некоторое расширение круга решаемых этим методом задач. Здесь приводится дальнейшее обобщение на основе непосредственной «гармонической линеаризации» нелинейностей в заданной системе уравнений (без обычно применяемых предварительных структурных построений) с последующим использованием аналитического условия существования периодического решения.

Рассмотрим следующие три класса нелинейных систем.

Первый класс. Свободные колебания системы автоматического регулирования описываются линейным дифференциальным уравнением любого порядка с постоянными коэффициентами

$$Q(p)x_1 = R(p)x_2 \quad \left(p \equiv \frac{d}{dt}\right) \quad (1)$$

и нелинейным уравнением, которое имеет одну из следующих форм:

$$x_2 = F(x_1, \dot{x}_1), \quad F(\dot{x}_2, x_2) = k_1 x_1, \quad F(\ddot{x}_2, \dot{x}_2) = k_1 x_1, \quad (2)$$

$$F_1(\ddot{x}_2) + c_1 \dot{x}_2 + F(x_2) = k_1 x_1, \quad c_1 \ddot{x}_2 + F_1(\dot{x}_2) + F(x_2) = k_1 x_1,$$

или другую аналогичную форму, когда под знаком нелинейных функций стоит только одна переменная и, возможно, ее производные по времени. Нелинейные функции могут быть плавными, ломаными или скачкообразными (релейными), они могут обладать гистерезисными петлями.

Второй класс. Система описывается уравнением (1) и уравнением, аналогичным (2), содержащим нелинейные функции двух переменных и, возможно, их производных:

$$F_1(x_1) + F_2(x_2) \quad \text{или} \quad F_1(x_1) + F_2(\dot{x}_2, x_2), \quad (3) \\ F(\dot{x}_2, x_1) \quad \text{или} \quad F(\dot{x}_2, x_2, x_1) \quad \text{и т. п.}$$

Третий класс. Сюда относятся такие случаи, когда, кроме линейных уравнений, имеются два или несколько нелинейных, связывающих между собой более двух переменных.

Во всех случаях ищется одночастотное периодическое решение.

Для систем первого класса искомое периодическое решение записывается в виде $x = a \sin \omega t$, где для первого из уравнений (2) $x = x_1$, для второго, четвертого и пятого $x = x_2$, для третьего $x = x_2$.

Учитывая только первую гармонику, заменяем приближенно

$$F(x, \dot{x}) \approx q(a, \omega)x + \frac{q_1(a, \omega)}{\omega} \dot{x}, \quad F_1(\ddot{x}) \approx -\frac{q_2(a, \omega)}{\omega^2} \ddot{x}, \quad (4)$$

где коэффициенты $q(a, \omega)$, $q_1(a, \omega)$, $q_2(a, \omega)$ определяются формулами

$$q(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin u, a\omega \cos u) \sin u \, du,$$

$$q_1(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin u, a\omega \cos u) \cos u \, du,$$

$$q_2(a, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F_1(-a\omega^2 \sin u) \sin u \, du,$$

при условии

$$\int_0^{2\pi} F(a \sin u, a\omega \cos u) \, du = 0, \quad \int_0^{2\pi} F_1(-a\omega^2 \sin u) \, du = 0$$

(метод может быть развит и на случай невыполнения последних равенств). Приближенная замена (4) называется гармонической линеаризацией.

Для систем второго класса искомое периодическое решение записывается в виде $x_2 = a \sin \omega t$, $x_1 = A(\omega) a \sin [\omega t + B(\omega)]$, где

$$A(\omega) = \left| \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|, \quad B(\omega) = \arg \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)}. \quad (5)$$

При этом, например, второе из выражений (3) заменяется приближенно:

$$F_1(x_1) + F_2(\dot{x}_2, x_2) \approx q^*(a, \omega)x_1 + q(a, \omega)x_2 + \frac{q_1(a, \omega)}{\omega} \dot{x}_2,$$

где

$$q^*(a, \omega) = \frac{1}{\pi A(\omega)a} \int_0^{2\pi} F_1[A(\omega)a \sin u] \sin u \, du,$$

если функция $F_1(x_1)$ однозначна (для гистерезисной функции добавляется член, содержащий $\dot{x}_1$).

В четвертом из выражений (3) предварительно заменяется:

$$x_1 = \xi(\omega)x_2 + \frac{\xi_1(\omega)}{\omega} \dot{x}_2, \quad \text{где } \xi(\omega) = A(\omega) \cos B(\omega), \quad \xi_1(\omega) = A(\omega) \sin B(\omega),$$

после чего используется первая из формул (4).

Аналогичные приемы гармонической линеаризации применяются и для систем третьего класса, причем искомое периодическое решение для одной из переменных записывается в виде $x = a \sin \omega t$ и привлекаются соответствующие соотношения вида (5) для остальных переменных.

Для отыскания периодического решения (автоколебаний) после замены (4) составляется характеристическое уравнение системы (1)–(2) в виде

$$L(p) \equiv M(p)S(a, \omega, p) + N(p) = 0, \quad (6)$$

где a и ω — искомые амплитуда и частота периодического решения,

входящие в коэффициенты уравнения. Затем подставляется $p = i\tilde{\omega}$ и выделяются вещественная и мнимая части:

$$L(i\tilde{\omega}) = X(a, \omega, \tilde{\omega}) + iY(a, \omega, \tilde{\omega}). \quad (7)$$

Последнее аналогично выражению кривой Михайлова в линейной теории регулирования. Следовательно, условием существования периодического решения является выполнение равенств

$$X(a, \omega) = 0, \quad Y(a, \omega) = 0 \quad (8)$$

(причем $\tilde{\omega} = \omega$) при вещественных положительных значениях для a и ω .

Основными задачами теории регулирования в данном вопросе являются: 1) определение областей значений параметров системы регулирования, внутри которых существует периодическое решение; 2) определение зависимости амплитуды и частоты периодического решения от значений параметров и 3) выделение устойчивых периодических решений.

Первые две задачи решаются на основании уравнений (8), причем все параметры системы входят в коэффициенты уравнения (6), а следовательно, и (8). Если требуется решить первые две задачи по некоторому параметру k , то (8) записывается в виде $X(a, \omega, k) = 0$, $Y(a, \omega, k) = 0$, откуда определяются $a = a(k)$ и $\omega = \omega(k)$. Для решения той же задачи по двум параметрам k_1 и k_2 имеем $X(a, \omega, k_1, k_2) = 0$, $Y(a, \omega, k_1, k_2) = 0$. Данный способ, как и все другие варианты метода гармонического баланса, является приближенным, поскольку здесь принимается во внимание лишь первая гармоника нелинейных колебаний. Однако при исследовании систем автоматического регулирования он дает хорошие результаты, так как обычно все высшие гармоники действительно не пропускаются в системе (чаще сервомотором и объектом регулирования). Это обстоятельство может быть оценено количественно на основании соотношений вида (5) для соответствующих переменных (после того как найдены ω и a).

Таким же способом определяются и вынужденные колебания нелинейной системы с частотой внешнего периодического воздействия. Последнее задается в виде $x_0 = c_0 \sin \omega_0 t$. Вместо (1) имеем здесь уравнение

$$Q(p)x_1 = R(p)x_2 + P(p)x_0.$$

Искомые вынужденные колебания записываются в виде $x = a_0 \sin(\omega_0 t - \varphi)$, где x обозначает ту переменную из двух: x_1, x_2 , которая стоит под знаком нелинейной функции в уравнении (2). Применяя гармоническую линеаризацию нелинейностей и используя соотношение

$$x_0 = \left(\frac{c_0 \cos \varphi}{a_0} + \frac{c_0 \sin \varphi}{a_0 \omega_0} p \right) x,$$

находим вместо (6) характеристическое уравнение вида

$$L(p) \equiv M(p)S(a_0, \omega_0, p) + N(p) - \left(\frac{c_0 \cos \varphi}{a_0} + \frac{c_0 \sin \varphi}{a_0 \omega_0} p \right) H(p) = 0,$$

на основании которого прежним путем получаем два уравнения:

$$X(a_0, \omega_0, c_0, \varphi) = 0, \quad Y(a_0, \omega_0, c_0, \varphi) = 0,$$

определяющие a_0 и φ , а также пороговые значения c_0 , выше которых имеют место вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия ω_0 . Эти же уравнения определяют зависимость указанных величин от параметров системы.

Выделение устойчивых периодических решений (автоколебаний и вынужденных колебаний) производится приближенно путем осреднения периодических коэффициентов, как у Б. В. Булгакова^(9,10), или путем использования критерия

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^0 \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^0 - \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^0 \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^0 > 0, \quad (9)$$

где $X(a, \omega, \tilde{\omega})$ и $Y(a, \omega, \tilde{\omega})$ берутся из (7).

В диссертации⁽¹¹⁾ доказано, что для определенного класса систем автоматического регулирования осреднение периодических коэффициентов приводит к необходимым и достаточным условиям устойчивости периодического решения. Хотя таких доказательств пока нет для других классов систем, но известно, что указанные выше критерии дают в большинстве случаев правильные результаты. Строгое исследование устойчивости периодического решения по Ляпунову⁽¹²⁾ разработано пока только для простейших (релейных) систем.

Опыт и рассмотрение конкретных примеров, проиллюстрированное в докладе автора на 2-м Всесоюзном совещании по теории автоматического регулирования (27 XI 1953 г.), показало практическую эффективность изложенного метода. Привлечение дополнительных физических соображений после отыскания периодических решений позволяет выделить также и области устойчивости равновесного состояния системы. Заметим, что в данном методе легко учитывается и постоянное по времени запаздывание τ , если оно в исследуемой системе имеется.

Поступило
20 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937. ² В. А. Котельников, Тр. ЛИИ, № 2 (1941). ³ Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, № 5 (1947). ⁴ В. А. Боднер, Тр. ВВИА, в. 221 (1947). ⁵ Г. С. Поспелов, Тр. ВВИА, в. 335 (1949). ⁶ А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.—Л., 1951. ⁷ М. А. Айзерман, Инж. сборн., 13 (1952). ⁸ Л. С. Гольдфарб, Диссертация, М., 1947. ⁹ Б. В. Булгаков, Прикладн. матем. и мех., № 4 (1942). ¹⁰ А. М. Летов, Тр. НИИСО, № 11, 1946. ¹¹ А. М. Летов, Диссертация, М., 1945. ¹² А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950.