

Действительный член АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ КАНАТА (УПРУГОЙ НИТИ) ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Для решения задачи о движении груза массы m на упругом канате переменной длины (см. рис. 1) следует проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\rho F \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F g \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -EF \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + mg, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} - \frac{d\xi}{dt} = v, \quad (4)$$

причем должны быть также удовлетворены начальные условия, касающиеся расположения и скоростей элементов каната в момент времени $t = t_0$.

Здесь ρ — объемная плотность ненапряженного каната; ξ — расстояние груза от точки схода каната с колеса; EF — жесткость каната растяжению; F — его поперечное сечение; g — ускорение силы тяжести; x — лагранжева координата элементов каната, представляющая собой длину каната между данным элементом и грузом в предположении, что канат не натянут; $u(x, t)$ — смещение элемента каната относительно груза вследствие деформации каната; l — лагранжева координата верхнего элемента каната.

Очевидно, что

$$\xi = l + u(l, t). \quad (5)$$

Условие (4) выражает равенство между скоростью элемента каната, приходящего в соприкосновение с ободом колеса (или, наоборот, покидающего колесо), и окружной скоростью этого колеса. При этом предполагается, что скольжение каната по колесу отсутствует. Впрочем, пользуясь результатами Н. Е. Жуковского в его исследовании о скольжении ремня на шкиве ⁽¹⁾, можно отказаться от последнего предположения и соответственно видоизменить условие (4).

Граничное условие (3) представляет собой уравнение движения груза под действием силы натяжения каната и силы тяжести. Уравнение (1) с соответствующими граничными и начальными условиями описывает движение элементов каната и груза как механической системы с бесконечным числом степеней свободы.

Наблюдения Г. Н. Савина, однако, показывают ⁽²⁾, что если оставить в стороне мгновения времени, непосредственно следующие за резким изменением окружной скорости колеса или резким изменением величины груза, движение элементов каната не имеет волнового характера и происходит с качественной стороны так, как будто бы канат был лишен массы.

В последнем случае имеем

$$u(x, t) = x\varphi(t), \quad (6)$$

где $\varphi(t)$ — некоторая подлежащая определению функция времени.

Причину затухания волновых движений следует искать во внутреннем трении каната, которое в уравнении (1) не учитывается. Заметим, что учет внутреннего трения приводит задачу к решению дифференциального уравнения в частных производных более высокого порядка ⁽²⁾.

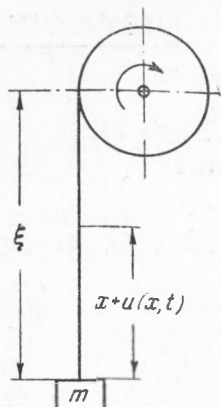


Рис. 1

Вследствие вышеизложенного можно искать приближенное решение задачи, принимая для искомой функции $u(x, t)$ представление (6).

Задачей дальнейшего является построение обыкновенного дифференциального уравнения для функции $\varphi(t)$.

При составлении приближенных уравнений следует по возможности избегать дифференцирования приближенных представлений, так как это неизбежно ведет к значительной утере точности. Поэтому предварительно умножим правую и левую части уравнения (1) на x и проинтегрируем в пределах от $x = 0$ до $x = l$, минимизируя тем самым невязку от последующей замены в этом уравнении точного значения $u(x, t)$ приближенным и избавляясь, кроме того, в результате интегрирования по частям от второй производной функции $u(x, t)$ по переменной x . Учитывая граничное условие (2), получим

$$\rho F \int_0^l x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx - \rho F \frac{l^2}{2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = EFl \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - EFu(l, t) - \rho Fg \frac{l^2}{2}. \quad (7)$$

Непосредственное интегрирование правой и левой частей уравнения (1) по переменной x приводит к равенству

$$\rho F \int_0^l \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx - \rho Fl \frac{d^2 \xi}{dt^2} = EF \left[\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \right] - \rho Fgl, \quad (8)$$

которое вместе с граничным условием (3) позволяет исключить частную производную от функции u по переменной x в соотношении (7). В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \left(ml + \frac{1}{2} \rho Fl^2 \right) \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \rho F \int_0^l (l - x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx = \\ = -EFu(l, t) + \left(ml + \frac{1}{2} \rho Fl^2 \right) g. \end{aligned} \quad (9)$$

Продифференцируем теперь по времени граничное условие (4), учитывая, что длина рабочей части каната l является переменной величиной. Имеем

$$\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x \partial t} \frac{dl}{dt} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{dv}{dt}. \quad (10)$$

Исключая теперь из равенства (9) вторую производную от функции ξ по времени, приходим к следующему основному интегро-дифференциальному соотношению:

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{1}{2} \rho Fl \right) l \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} + \left(m + \frac{1}{2} \rho Fl \right) l \frac{dl}{dt} \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x \partial t} - \\ - \rho F \int_0^l (l - x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx + EFu(l, t) = \left(m + \frac{1}{2} \rho Fl \right) \left(\frac{dv}{dt} + g \right) l. \end{aligned} \quad (11)$$

В этом соотношении окружная скорость колеса v и длина рабочей части каната l связаны равенством

$$\left[1 + \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\right] \frac{dl}{dt} = -v, \quad (12)$$

которое нетрудно получить, исключая функцию ξ из соотношений (4) и (5).

Вторым членом в квадратных скобках равенства (12) можно пренебречь, так как он в реальных условиях на три порядка меньше единицы.

Подставим в интегро-дифференциальное соотношение (11) приближенное представление функции $u(x, t)$ согласно равенству (6). После очевидных преобразований придем к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$\left(m + \frac{1}{3} \rho Fl\right) l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(m + \frac{1}{2} \rho Fl\right) \frac{dl}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + EF\varphi = \left(m + \frac{1}{2} \rho Fl\right) \left(\frac{dv}{dt} + g\right), \quad (13)$$

которое можно положить в основу приближенного решения задач об идеально упругом канате переменной длины.

Если пренебречь собственной массой каната, т. е. считать $\rho = 0$, то уравнение (13) обращается в уравнение, исследованное Н. П. Нероновым⁽⁴⁾.

В другом частном случае $l = \text{const}$ (и, следовательно, $v = 0$) приходим к приближенному уравнению основного тона колебания груза на упругой нити с известной поправкой Релея, учитывающей собственную массу нити.

Заметим, что непосредственное применение метода Релея к составлению приближенных уравнений каната переменной длины встречает затруднения, обусловленные сложностью граничных условий, а также тем обстоятельством, что уравнения Лагранжа второго рода справедливы лишь для систем, масса которых в процессе движения не изменяется.

Приемом, аналогичным вышеизложенному, можно получать интегро-дифференциальные соотношения и приближенные уравнения для канатов переменной длины с учетом несовершенной упругости.

Поступило
29 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Е. Жуковский, О скольжении ремня на шкивах, **З**, 1949, стр. 497.
² А. Ю. Ишлинский, Прикладн. матем. и мех., в. 1, 79 (1940). ³ Г. Н. Савин, Докл. АН УССР, № 6 (1951). ⁴ Н. П. Неронов, Тр. Совещ. по шахтным подъемным канатам, 1944.