

Б. М. УРАЗБАЕВ

ОБ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ В АЛГЕБРЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 9 II 1954)

Асимптотические формулы в алгебре стали изучаться после исследований Б. Н. Делоне (см. гл. I монографии ⁽¹⁾, стр. 21—23). Б. Н. Делоне вывел следующую основную асимптотическую формулу:

$$\nu_{n,\tau} r^{\frac{n(n+1)}{2}} + O\left(r^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\right),$$

которая выражает закон роста числа целых точек всех полей алгебраических чисел данной степени n и сигнатуры τ , лежащих внутри n -мерной сферы радиуса r с центром в начале координат при возрастании r . Здесь $\nu_{n,\tau}$ — некоторая постоянная, зависящая от n и τ .

За координаты точки, соответствующей уравнению с действительными коэффициентами, принимаются действительные корни этого уравнения и полусуммы и полуразности, деленные на i , комплексно-сопряженных его корней. В дальнейшем Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеевым ⁽²⁾ были получены аналогичные формулы для роста числа целых точек, соответствующих уравнениям третьей или четвертой степени с данными группами Галуа, кроме знакопеременной группы для уравнений четвертой степени. Так, например, асимптотическая формула для уравнений третьей степени с циклической группой такова:

$$\nu_{3,c} r^3 \lg r + O(r^3),$$

тогда как аналогичная формула для уравнений третьей степени с симметрической группой

$$\nu_{3,c} r^6 + O(r^5).$$

В настоящей заметке доказывается следующая теорема:

Теорема. Число $N_l(x)$ циклических полей простой степени l , дискриминанты которых не превосходят x^{l-1} , выражается асимптотической формулой

$$N_l(x) = \lambda x + O\left(x^{1-\frac{1}{l-1}+\varepsilon}\right),$$

где λ — постоянная $\neq 0$, зависящая от l , ε — произвольное число > 0 .

При этом используются идеи доказательства асимптотического закона распределения простых чисел в применении к производящей функции, выражающейся через L -ряды Дирихле ^{(3,4)*}.

В дальнейшем нам потребуются следующие предложения.

* Другой вариант доказательства с остаточным членом $O\left(x^{1-\frac{1}{2(l-1)}+\varepsilon}\right)$ получен А. Г. Постниковым.

Л е м м а 1. Пусть

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s};$$

L — ряд Дирихле, $s = \sigma + it$, χ — характеры mod l , $1/2 \leq \sigma_0 < 1$.
Тогда в полосе $1/2 \leq \sigma_0 < \sigma < 1$ справедлива оценка

$$|L(s, \chi)| = O\left(|t|^{\frac{1-\sigma}{2}+\varepsilon}\right).$$

Доказательство см. у Тичмарша ⁽⁵⁾.

Л е м м а 2. Дискриминант D циклического поля степени l имеет вид

$$D = (l^\alpha p_1 p_2 \dots p_k)^{l-1},$$

где l — простое число, $\alpha = 0$ или 2 , а $p_1, p_2, \dots, p_k$ — простые числа вида $ml + 1$.

Л е м м а 3. Число циклических полей степени l , имеющих дискриминант D , равно $(l-1)^k$, если $\alpha = 2$, и $(l-1)^{k-1}$, если $\alpha = 0$.

Доказательство этих лемм см. в работе автора ⁽⁶⁾.

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \prod_{p \equiv 1 (l)} \left(1 + \frac{l-1}{p^s}\right),$$

где произведение распространяется по всем простым числам $p \equiv 1 (l)$. Покажем, что $f(s)$ регулярна во всей комплексной плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка.

В самом деле, утверждение вытекает из соотношений

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{fs}}\right)^{-g} \quad (7), \quad fg = l-1,$$

$$f(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi) \prod_{p \equiv 1 (l)} \left(1 + \frac{l-1}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{l-1} \prod_{p \not\equiv 1 (l)} \left(1 - \frac{1}{p^{fs}}\right)^g,$$

ибо оба произведения справа сходятся абсолютно при $\sigma > 1/2$, а $L(s, \chi)$ — целая функция, если χ отличен от главного характера χ_0 .

В силу $L(s, \chi_0) = \left(1 - \frac{1}{l^s}\right) \zeta(s)$ точка $s = 1$ есть полюс первого порядка $f(s)$. Функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 1$ и по принципу аналитического продолжения она регулярна всюду, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом

$$\lambda = \left(1 - \frac{1}{l}\right) \prod_{p \equiv 1 (l)} \left(1 + \frac{l-1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{l-1} \prod_{p \not\equiv 1 (l)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^g \lim_{s \rightarrow 1} \prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi)^* ; \quad (1)$$

$f(s)$ — искомая производящая функция. Имеем:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I(n)}{n^s}, \quad I(n) = \begin{cases} (l-1)^k, & \text{если } n = p_1 p_2 \dots p_k, \\ & p_i \equiv 1 (l), \\ 0, & \text{если } n \neq p_1 p_2 \dots p_k. \end{cases} \quad (2)$$

* По теореме Дирихле о простых числах в прогрессии предел существует и отличен от нуля.

Сумматорной функцией коэффициентов для $f(s)$ является

$$\varphi(x) = \sum_{n \leq x} I(n).$$

Доказательство теоремы равносильно, как показывает лемма 3, асимптотической оценке суммы $\varphi(x)$. Обычно вместо $\varphi(x)$ рассматривают функцию

$$\varphi_1(x) = \int_1^x \varphi(u) du.$$

Справедливо равенство (см. (3), теорема А, стр. 28)

$$\frac{\varphi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) I(n). \quad (3)$$

Согласно лемме 1 в полосе $1/2 \leq \sigma_0 < \sigma < 1$

$$|f(s)| = O\left(|t|^{\left(\frac{1-\sigma}{2} + \varepsilon\right)(1-\sigma)}\right). \quad (4)$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds$$

абсолютно сходится при $a > 1$ и сходится при $a = 1 - \frac{2}{l-1} + \varepsilon$, так как из (4)

$$\left| \frac{f(s)}{s(s+1)} \right| = O(|t|^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds$$

по замкнутому контуру Γ , представляющему четырехугольник $(a - iT, 2 - iT, 2 + iT, a + iT)$, $a = 1 - \frac{2}{l-1} + \varepsilon$.

Подинтегральная функция не имеет особенностей ни на контуре Γ , ни внутри этого контура, кроме точки $s = 1$ — полюса первого порядка с вычетом $\frac{\lambda}{2} x$.

По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{2-iT} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iT}^{2+iT} \text{idem} + \frac{1}{2\pi i} \int_{2+iT}^{a+iT} \text{idem} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a+iT}^{a-iT} \text{idem} = \frac{\lambda}{2} x.$$

Согласно лемме 1 и оценке (4) интегралы на отрезках $(a - iT, 2 - iT)$, $(2 + iT, a + iT)$ имеют порядок $O(T^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, поэтому они $\rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Итак, при $T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds = \frac{\lambda}{2} x + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds, \quad a = 1 - \frac{2}{l-1} + \varepsilon. \quad (5)$$

Интеграл слева (5) абсолютно сходится и, кроме того, при $\sigma = 2$ равномерно сходится ряд (2), следовательно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds = \sum_{n=1}^{\infty} I(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^s ds.$$

Отсюда (см. (3), теорема В, стр. 43)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{f(s)}{s(s+1)} x^s ds = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) I(n). \quad (6)$$

Интеграл справа (5) есть величина порядка $O(x^{1+\varepsilon})$, следовательно, из (3), (5), (6) находим

$$\varphi_1(x) = \frac{\lambda}{2} x^2 + O\left(x^{2-\frac{2}{l-1}+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Функция $\varphi(x)$ — возрастающая, и поэтому

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x \varphi(u) du \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi(u) du.$$

Эти неравенства (см. (3), теорема 22, стр. 83) вместе с (7) дают искомую асимптотическую оценку

$$\varphi(x) = \lambda x + O\left(x^{1-\frac{1}{l-1}+\varepsilon}\right),$$

где λ определяется формулой (1).

Этим теорема доказана, так как $N_l(x)$ получается из $\varphi(x)$ делением на $l-1$, если ограничиться значением $\varepsilon = 0$.

Пользуясь полученной теоремой, можно доказать следующее предложение (6):

Т е о р е м а. Число целых точек циклических полей простой степени l , лежащих внутри l -мерной сферы радиуса r с центром в начале координат, выражается асимптотической формулой

$$v_3 r^3 \lg r + O(r^3),$$

если $l=3$, и формулой

$$v_l r^l + O(r^{l-1}),$$

если $l > 3$.

В заключение считаем приятным долгом выразить благодарность А. О. Гельфонду и Д. К. Фаддееву за ценные советы и указания.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 11 (1940).
² Д. К. Фаддеев, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 133 (1940). ³ А. Ингам, Распределение простых чисел, 1936. ⁴ Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L -функций Дирихле, 1947. ⁵ Е. К. Тичмарш, Дзета-функция Римана, 1947.
⁶ Б. М. Уразбаев, Изв. АН Казахск. ССР, сер. матем.-мех., в. 5 (1951). ⁷ Г. Хассе, Лекции по теории чисел, 1953, стр. 260.