

Ю. И. СОРКИН

О ВЛОЖЕНИИ СТРУКТУРОИДОВ И СТРУКТУР

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 II 1954)

Ивенс (1) решил проблему тождества для любого класса $\mathcal{A}$ -алгебр такого, что всякая неполная $\mathcal{A}$ -алгебра этого класса вложима в $\mathcal{A}$ -алгебру этого же класса *. Далее Ивенс, опираясь на теорему Макнила (2), доказанную также у Биркгофа (3), о вложении частично упорядоченных множеств в структуры, утверждает, что тем самым решена проблема тождества для структур. Однако для такого заключения необходимо, чтобы понятия частично упорядоченного множества и неполной структуры совпадали, что и утверждается вскользь Ивенсом. В действительности, однако, эти два понятия, хотя и тесно связаны друг с другом, не являются тождественными, и для применимости теоремы Ивенса к структурам необходима теорема о вложении неполных структур в структуры. В дальнейшем, для краткости, мы будем называть неполные структуры в смысле Ивенса **структуроидами**.

В предлагаемой заметке уточняется объем понятия структуроида, выяснена связь структуроидов с частично упорядоченными множествами и указывается вложение счетных структуроидов в структуроиды с тремя образующими, из чего, в частности, вытекает возможность вложения счетных структур в структуры с тремя образующими.

Если в качестве аксиом структуроида рассмотреть следующую систему Σ :

$$\begin{array}{ll} I_{\cup}) a \cup a = a; & I_{\cap}) a \cap a = a; \\ A_{\cup}) a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c; & A_{\cap}) a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c, \\ K_{\cup}) a \cup b = b \cup a, & K_{\cap}) a \cap b = b \cap a, \\ C_{\cup}^1) a \cup (a \cap b) = a, & C_{\cap}^1) a \cap (a \cup b) = a, \\ C_{\cup}^2) (a \cap b) \cup a = a, & C_{\cap}^2) (a \cup b) \cap a = a, \\ C_{\cup}^3) a \cup (b \cap a) = a, & C_{\cap}^3) a \cap (b \cup a) = a, \\ C_{\cup}^4) (b \cap a) \cup a = a, & C_{\cap}^4) (b \cup a) \cap a = a, \end{array}$$

то, в то время как для структур существует обилие полных минимальных подсистем, описанных Ю. И. Соркиным (4), для структуроидов имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Системы*

$$\left(I_{\cup}^i, A_{\cup}^i, K_{\cup}^i, C_{\cup}^i \right); \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

являются полными и минимальными для структуроидов. Этими подсистемами исчерпываются все полные минимальные подсистемы системы Σ для структуроидов.

* Определения $\mathcal{A}$ -алгебр и неполных $\mathcal{A}$ -алгебр см. (1).

Здесь, как и в работе (4), * означает произвольную операцию $\cup$ или $\cap$.

Теорема 2. Если в структуроиде R положить $a \geq b$ в том и только том случае, когда $a \cup b$ определено и равно a , то R становится частично упорядоченным множеством относительно соотношения $\geq$.

Если мы теперь рассмотрим обратную задачу, т. е. попытаемся определить в частично упорядоченном множестве P две бинарные частичные операции $\cup$ и $\cap$ так, чтобы они удовлетворяли аксиомам Σ и соотношения $a \geq b$ в P выполнялись, если и только если $a \cup b = a$ в структуроиде, то оказывается, что такое определение структуроида на данном частично упорядоченном множестве, вообще говоря, может быть выполнено многими различными способами, каждый из которых мы назовем структуроидозацией частично упорядоченного множества P . Имеет место

Теорема 3. Множество Y структуроидозаций частично упорядоченного множества P составляет полную структуру.

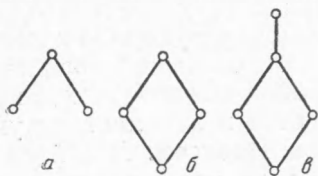


Рис. 1

Нулем структуры Y является структуроидозация, при которой операции определены лишь для пар сравнимых между собой элементов и равны, соответственно, наименьшей верхней и наибольшей нижней граням пар элементов. Единицей структуры Y является структуроидозация, при которой операция объединения $\cup$ определена для всех пар элементов, имеющих наименьшую верхнюю грань, а операция

пересечения $\cap$ определена для всех пар, имеющих наибольшую нижнюю грань в P , и равны им соответственно.

Пусть для структуроида R существует структура $L(R)$, содержащая подмножество R' такое, что между элементами множеств R и R' существует взаимно-однозначное соответствие φ , сохраняющее операции, т. е. $r_1 * r_2 = r_3$ в том и только том случае, когда $r'_1 * r'_2 = r'_3$. Это соответствие φ называется вложением структуроида R в структуру $L(R)$.

Теорема 4. Всякий структуроид R вложим в полную структуру $L(R)$.

Например, в качестве такой объемлющей структуры $L(R)$ может быть взята полная структура идеалов структуроида R относительно теоретико-множественного включения. Под идеалом структуроида R мы понимаем здесь множество элементов $M \subset R$ такое, что вместе с каждой парой элементов $m_1, m_2 \in M$ в M лежит элемент $m_1 \cup m_2$, если он в R определен, а также все элементы $x \leq m \in M$. Заметим, что различные структуроидозации фиксированного частично упорядоченного множества индуцируют, вообще говоря, неизоморфные минимальные объемлющие структуры. Например, частично упорядоченное множество, изображенное на рис. 1а, допускает две различные структуроидозации, при каждой из которых существует лишь по одной объемлющей структуре, причем эти структуры неизоморфны (см. рис. 1б, 1в). В силу теоремы Ивенса (1) и теоремы 4 проблема тождества в структурах разрешима.

Подмножество M структуроида R называется системой образующих, если всякий элемент $r \in R$ либо $\in M$, либо может быть получен как результат конечного числа операций, определенных в R над элементами из M .

Теорема 5. Всякий счетный структуроид R вложим в структуроид S с тремя образующими.

Такое вложение осуществляется следующим образом. Пусть структуроид R состоит из элементов $r_1, r_2, \dots$ и частичные операции в R заданы формулами:

$$r_i \cup r_j = r_{u(i, j)}; \quad r_i \cap r_j = r_{v(i, j)}, \quad (1)$$

Рассмотрим множество S , состоящее из элементов:

$$a, b, c, \alpha_i, \alpha_{-i}, \beta_i, \beta_{-i}, \gamma_i, \gamma_{-i}, \delta_i, \delta_{-i}, \varepsilon_i, \varepsilon_{-i}, x_i, x_{-i}, \lambda_i, r_i,$$

где i, j пробегает натуральный ряд, если R счетно, или [значения $1, 2, \dots, n$, если R состоит из n элементов, и определим на множестве S частичные операции равенствами (1), равенствами

$$\eta_i \cup \eta_j = \eta_{\max(i, j)}; \quad \eta_i \cap \eta_j = \eta_{\min(i, j)}, \quad (2)$$

где η принимает значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, x$, а i — целочисленные значения, одновременно положительные или отрицательные, и табл. 1, предполагая при этом, что обе операции коммутативны.

Таблица 1

	a	b	c	α_i	α_{-i}	β_i	β_{-i}	γ_i	γ_{-i}	δ_i	δ_{-i}	ε_i	ε_{-i}	x_i	x_{-i}	λ_i	r_i
a				α_{-i}	$\beta_{i,i} a$	α_{-i}		γ_{-i}	a	γ_{-i}	α_{-i}		x_i	x_i	a		
b				β_i		β_i	b	$\beta_{i,i} \beta_i$			ε_{-i}	b	ε_{-i}			r_i	r_i
c	α_{-i}			c	α_{-i}			δ_i		δ_i	c			α_{-i}	$\alpha_{-(i-1)}$		
α_j	α_i		α_j			$\beta_{[i,j]}$		$\beta_{j,i} \gamma_i$	$\beta_{j,i} \gamma_{-i}$	δ_i			$\beta_{j,i} \varepsilon_{-i}$	$\tau_{j,i} x_i$	$\tau_{j,i} x_{-i}$	$\beta_{j,i} x_i$	
$\alpha_j \beta_j a$	β_j	c	α_{-i}			$\tau_{ji} \alpha_{-j}$	$\beta_{j,i} \alpha_{-j}$	$\tau_{ji} \alpha_{-j}$	$\beta_{j,i} \alpha_{-j}$	α_{-j}	$\beta_{j,i} \alpha_{-j}$		α_{-j}	$\alpha_{-(j,i)}$	$\tau_{j,i} \alpha_j$		
β_j	γ_j	b		$\tau_{ji} \alpha_{-i}$			β_j	$\tau_{ji} \beta_j$			$\beta_{j,i} \varepsilon_{-i}$	β_i	$\beta_{j,i} \varepsilon_{-i}$				
β_j		β_j			$\beta_{[j,i]}$	β_j			$\gamma_{-(i,j)}$			$\beta_{j,i} \beta_{-i}$	ε_{-i}				r_i
γ_j	γ_j			$\tau_{ji} \alpha_{-i}$	$\beta_{j,i} \gamma_j$	$\gamma_{(j,i)}$			γ_{-j}	$\delta_{[i,j]}$				x_i			
$\gamma_j a$	$\beta_{j,i} \beta_{-i}$	δ_j	$\beta_{i,i} \alpha_{-i}$	$\beta_{j,i} \gamma_j$		$\tau_{ji} \beta_{-i}$	γ_i				$\tau_{ji} \gamma_{-j}$				γ_{-j}		
δ_j		ε_j	c	α_{-i}	$\gamma_{i,i} \delta_j$	$\beta_{j,i} \varepsilon_i$	$\tau_{ji} \gamma_i$			δ_i	$\tau_{ji} \delta_j$		α_{-i}				
δ_j	α_{-i}		δ_{-j}		δ_{-j}				$\delta_{[i,j]}$	δ_j			$\varepsilon_{-(i,j)}$				
ε_j		ε_j			$\beta_{i,i} \varepsilon_i$	ε_j	$\beta_{i,i} \varepsilon_j$			$\varepsilon_{(i,i)}$			ε_{-i}	$x_{[i,j]}$			r_i
$\varepsilon_j x_j$	b		$\beta_{i,i} \alpha_{-i}$		$\beta_{i,i} \beta_{-i}$	β_{-i}				$\tau_{ji} \delta_i$	ε_i			$\tau_{ji} \varepsilon_j$			
x_j	a		α_{j+i}	$\alpha_{(j+i)}$	$\beta_{i,i} \lambda_j$	$\beta_{i,i} x_j$		γ_i			$\tau_{ji} \varepsilon_i$				x_j	$\tau_{ji} x_j$	
x_j	x_{-j}		α_i	α_{-i}	$\tau_{i,j} x_j$				x_{-j}	α_{-i}		$x_{[i,j]}$	x_{-j}				
λ_j					$\tau_{i,j} \lambda_j$									$\tau_{ji} \lambda_j$			$\beta_{j,i} r_i$
r_j		b					β_{-i}					ε_i					

В табл. 1 на пересечениях строк и столбцов выше главной диагонали стоят элементы, равные объединению входных элементов, и ниже главной диагонали стоят элементы, равные пересечению входных

элементов. Символ $\tau_{i,j}\xi$ означает, что при $i \leq j$ результат равен ξ , а при $i > j$ результат не определен; символ $\rho_{i,j}\xi$ означает, что при $i = j$ результат равен ξ , а при $i \neq j$ результат не определен; $[i, j] = \max\{i, j\}$ и $(i, j) = \min\{i, j\}$. Пустые места в таблице означают, что соответствующие операции не определены в S .

Легко проверить, что этим S превращается в структуроид, причем элементы a, b, c составляют в нем систему образующих.

Из теоремы 5 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Всякая счетная структура изоморфна подструктуре структуры с тремя образующими.*

Для этого надо структуру R вложить по теореме 5 в структуроид S , а затем структуроид S по теореме 4 вложить в структуру $L(S)$.

Следствие 2. *Всякая конечная структура R изоморфна подструктуре конечной структуры с тремя образующими.*

Действительно, если структура R состоит из n элементов, то структуроид S состоит из $14n + 3$ элементов, а структура его идеалов не более чем из 2^{14n+3} элементов.

Следствие 3. *Из теоремы 5 вытекает теорема Уитмена (5): свободная структура со счетным множеством свободных образующих изоморфна подструктуре свободной структуры с тремя образующими.*

Относительно теоремы 5 отметим, что аналогичные ей теоремы о вложении счетных алгебраических образований в соответствующие алгебраические образования с конечным числом образующих в настоящее время известны для групп (6), неассоциативных алгебр (7), ассоциативных колец и алгебр (8), проективных плоскостей и систем с одной операцией (9). Все эти теоремы вложения возникли из поставленной А. Г. Курошем (10) соответствующей проблемы для групп. Для структур автору эта задача также была предложена А. Г. Курошем.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
29 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. Evans, J. Lond. Math. Soc., 26, 64 (1951). ² H. M. MacNeille, Trans. Am. Math. Soc., 42, 416 (1937). ³ Г. Биркгоф, Теория структур, М., 1952, стр. 94. ⁴ Ю. И. Соркин, Укр. матем. журн., 3, 85 (1951). ⁵ P. M. Whitman, Ann. of Math., 43, 105 (1942). ⁶ G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, J. Lond. Math. Soc., 24, 247 (1949). ⁷ А. И. Жуков, Матем. сборн., 27:2, 267 (1950). ⁸ А. И. Мальцев, Усп. матем. наук, 7, 1, 181 (1952). ⁹ T. Evans, Proc. Am. Math. Soc., 3, 614 (1952). ¹⁰ А. Г. Курош, Теория групп, М.—Л., 1944, стр. 326.