

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

**ТЕОРЕМА О СООТВЕТСТВИИ ГРАНИЦ И ВАРИАЦИОННЫЕ
ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком Л. И. Седовым 12 II 1954)

В работе устанавливаются теорема о соответствии границ и ряд вариационных теорем для эллиптической системы уравнений*

$$au_x + bu_y - v_y = 0, \quad du_x + cu_y + v_x = 0, \quad (1)$$

$$\delta = ac - \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 > 0, \quad a > 0.$$

Теорема (о соответствии границ). Пусть в области G в плоскости $z = x + iy$ u и v являются непрерывно дифференцируемыми решениями системы уравнений (1), где a, b, c, d — заданные в области G функции от x и y , имеющие производные, удовлетворяющие условию H и такие, что $m < a, c, \delta < M$; $|b|, |d| < M$; m, M — положительные постоянные; G^* — область в плоскости $w = f(z) = u + iv$, соответствующая G **.

Тогда, если все граничные точки L и L^* областей G и, соответственно, G^* достижимы, то функция $w = f(z)$ и ей обратная функция $z = f^{-1}(w)$ равномерно непрерывны в замкнутых областях $\bar{G}$ и $\bar{L}$ и, соответственно, $G^* + L^*$ и дают взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между точками этих замкнутых областей.

В самом деле, полагая

$$\zeta = \xi + i\eta = -\frac{\sqrt{\delta_0}}{c_0}(y - y_0) + i\left[(x - x_0) - \frac{b_0 + d_0}{2c_0}(y - y_0)\right],$$

$$w = u + iv = \frac{1}{\sqrt{\delta_0}} U + i\left(\frac{b_0 - d_0}{2\sqrt{\delta_0}} U + V\right), \quad U + iV = \omega,$$

где индекс нулик указывает значения величин в фиксированной точке $z_0 \in G$, получаем неравенства

$$\Lambda(z_0) \geq \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3, \quad \lambda(z_0) \leq \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

где $\Lambda(z_0), \lambda(z_0)$ — максимальное и минимальное растяжения функции $w = f(z)$ в точке z_0 ; Λ_i, λ_i ($i = 1, 2, 3$) — то же самое, но в применении, соответственно, к функциям $\zeta = \zeta(z)$, $\omega = \omega(\zeta)$ и $w = w(\omega)$. Но $\Lambda_2 = \lambda_2$ (3), а $K_1 = \Lambda_1/\lambda_1$ и $K_3 = \Lambda_3/\lambda_3$ в соответствии с общими формулами (4),

* Начало исследований предельных свойств решений краевых задач при изменении области положено в работах М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева (1).

** Сохранение области для системы уравнений (1) установлено в наших работах (2, 3).

а следовательно, и $K(z) = \Lambda(z)/\lambda(z)$ равномерно ограничены в области G . Полагая теперь $0 < \beta \leq |f(z_{1r}) - f(z_{2r})|$, где z_{1r} и z_{2r} — точки области G , лежащие на пересечении окружности $|z - P| = r$ с жордановыми полуинтервалами Γ_1 и Γ_2 , определяющими одну и ту же достижимую точку P на L , приходим к неравенству

$$\beta^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} d\theta \int_{\varepsilon}^R \left| \frac{df(z)}{ds} \right|^2 r dr,$$

где R, ε — положительные постоянные ($\varepsilon < R$); θ_{1r} и θ_{2r} — аргументы точек $(z_{1r} - P)$ и $(z_{2r} - P)$; d/ds — производная по направлению окружности $|z - P| = r$. Отсюда получаем неравенство

$$\beta^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} < 2\pi K \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} d\theta \int_{\varepsilon}^R \Lambda(z) \lambda(z) r dr < 2\pi K S,$$

где K и S — конечные постоянные; S — верхняя грань площади областей, содержащихся в G . Из последнего неравенства следует справедливость теоремы.

Следствие. Пусть функция $w = f(z) = u + iv$ отображает круг $|z| < 1$ на заданную область G^* в плоскости $w = u + iv^*$. Тогда для того, чтобы эта функция давала взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между точками замкнутых областей $|z| \leq 1$ и $G^* + L^*$, необходимо и достаточно, чтобы граница L^* области G^* была жордановой кривой.

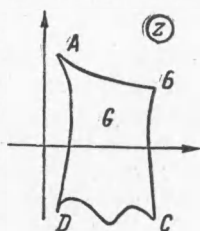


Рис. 1

Пусть G — область в плоскости $z = x + iy$, ограниченная двумя потенциальными линиями AB, DC : $u|_{AB} = 0$, $u|_{DC} = H = \text{const} > 0$, и двумя линиями тока AD, BC : $v|_{AD} = c = \text{const}$, $v|_{BC} = c + Q = \text{const} > c$; $w = f(z) = u + iv$ — комплексный потенциал, соответствующий области G , т. е. решение системы уравнений (1) при указанных краевых условиях; $\nabla u = u_x + iu_y$, $L = AB + DC + AD + BC$, $L' = AB + DC$ (см. рис. 1).

Пусть $G_1 \subset G$ — область, получающаяся из G путем вариации ее граничных потенциальных линий и линий тока; $w_1 = f_1(z) = u_1 + iv_1$ — комплексный потенциал, соответствующий области G_1 , и вообще все величины, взятые с индексом единица снизу, относятся к области G_1 . При замене области G областью G_1 значение потенциальной функции u на линии наименьшего потенциала AB и на потенциальной линии, ей соответствующей, условимся все время считать равным нулю, а под соответствующими линиями тока будем понимать линии $v(x, y) = v_1(x, y) = \text{const}$.

При замене области G областью G_1 за счет изменения краевых условий путем смещения одной из точек A, B, C, D вдоль границы G или при вдавливании одной из граничных потенциальных линий и линий тока, но при неизменных точках их раздела и при неизменном значении H имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. При уменьшении потенциальной линии: а) $Q_1 < Q$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока и $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока, на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока;

* Существование такого отображения установлено М. А. Лаврентьевым (5).

в) в $G_1 + L_1 - L'_1 L'$ будет $u_1 > u$, если уменьшается потенциальная линия наименьшего потенциала, и $u_1 < u$, если уменьшается потенциальная линия наибольшего потенциала; г) линии тока в $G_1 + L_1$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

Теорема 2. При вдавливании потенциальной линии: а) $Q_1 > Q$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока и $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока; в) в $G_1 + L_1 - L'_1 L'$ будет $u_1 > u$, если вдавливается потенциальная линия наибольшего потенциала, и $u_1 < u$, если вдавливается потенциальная линия наименьшего потенциала.

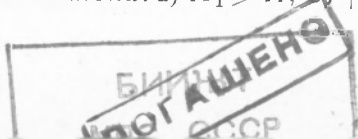
Теорема 3. При вдавливании линии тока: а) $Q_1 < Q$; б) $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и на одной из потенциальных линий u , кроме того, на другой потенциальной линии или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$, или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой линии тока, и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца, причем на неизменной линии тока в первом случае будет $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи концов и $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вне концов, а во втором случае $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи конца ее, примыкающего к потенциальной линии, на которой $|\nabla u_1| < |\nabla u|$, и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца; в) на неизменной части вдавливаемой линии тока $u_1 > u$ со стороны линии наибольшего потенциала и $u_1 < u$ со стороны линии наименьшего потенциала; г) линии тока в $G_1 + L_1$ отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

При тех же условиях, но при неизменном значении Q имеют место, соответственно, следующие теоремы:

Теорема 1а. При уменьшении потенциальной линии: а) $H_1 > H$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии, на неизменной линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии и $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии; в) $u_1 > u$ в $G_1 + L_1$ вне неизменной части уменьшаемой потенциальной линии, если уменьшается потенциальная линия наименьшего потенциала; если же уменьшается потенциальная линия наибольшего потенциала, то $u_1 > u$ на неизменной ее части и на неизменной линии тока и $u_1 < u$ на неизменной части увеличиваемой линии тока; г) линии тока $G_1 + L'$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

Теорема 2а. При вдавливании потенциальной линии: а) $H_1 < H$; б) $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и на одной из линий тока u , кроме того, на другой линии тока или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$, или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца, причем на неизменной потенциальной линии в первом случае будет $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи концов и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вне ее концов, а во втором случае $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи конца ее, примыкающего к линии тока, на которой $|\nabla u_1| < |\nabla u|$, и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца; в) $u_1 < u$ в $G_1 + L_1$ вне неизменной части вдавливаемой потенциальной линии, если вдавливается линия наименьшего потенциала; если же вдавливается линия наибольшего потенциала, то $u_1 < u$ на неизменной ее части, на одной из линий тока и на другой линии тока вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и $u_1 > u$ вне концов на вдавленной части потенциальной линии.

Теорема 3а. При вдавливании линии тока: а) $H_1 > H$; б) $|\nabla u_1| >$



$>|\nabla u|$ на неизменной линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях и $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях; в) $u_1 > u$ на неизменной линии тока, а на неизменной части вдавливаемой линии тока $u_1 > u$ со стороны потенциальной линии наибольшего потенциала и $u_1 < u$ со стороны линии наименьшего потенциала; г) линии тока в $G_1 + L'$ отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

Справедливость пп. а), в), г) теорем 1, 2, 3, 1а, 2а, 3а для произвольных односвязных областей, ограниченных жордановыми кривыми, и п. б) в предположении, что граничные предельные значения ∇u и ∇u_1 существуют, следует из теоремы о сохранении области для эллиптических систем дифференциальных уравнений, установленной нами ранее (^{2,3}).

Поступило
27 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 551 (1937). ² Г. Н. Положий, ДАН, 58, № 7 (1947). ³ Г. Н. Положий, Матем. сборн., 32, № 3 (1953). ⁴ Г. Н. Положий, ДАН, 63, № 6 (1948). ⁵ М. А. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 6 (1948).