

МАТЕМАТИКА

Академик М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕОРЕМЕ ЛИУВИЛЛЯ

Пусть система

$$B = f(A);$$

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z) \quad (1)$$

реализует гомеоморфное отображение области D пространства точек $A(x, y, z)$ на область Δ пространства точек $B(u, v, w)$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что все функции (1) дифференцируемы и что все частные производные первого порядка удовлетворяют условию Гельдера

$$\left| \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_A - \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{A'} \right| < k \overline{AA'}^\alpha, \dots$$

где k и α , $0 < \alpha \leq 1$, — две положительные постоянные; $\overline{AA'}$ — расстояние между точками A и A' . Примем также, что функциональный определитель системы (1) всюду в D положителен.

При этих условиях система (1) будет переводить каждую бесконечно малую сферу S области D в бесконечно малый эллипсоид ϵ области Δ ; обозначим через p отношение наибольшей оси к наименьшей оси эллипсоида ϵ , $1 \leq p = p(x, y, z)$.

Лиувилль показал, что если $p \equiv 1$, то отображение (1) всегда сводится к сдвигу, преобразованию подобия и инверсии; иначе говоря, Лиувиллем была показана невозможность конформного отображения трехмерных областей*.

В настоящей заметке я имею в виду отметить два результата, устанавливающие, в некотором смысле, устойчивость отмеченного свойства отображения (1) при $p \equiv 1$. Мы показали при некоторых дополнительных условиях, что если p близко к единице, то отображение (1) близко к лиувиллевскому.

1. Пусть область D — единичная сфера, а Δ принадлежит единичной сфере. Обозначим через

$$B = L(A) \quad (2)$$

отображение сферы, получаемое ее сдвигом, а также преобразованиями подобия и инверсии. Отображение (2) будем называть лиувиллевским.

При этих обозначениях и принятых условиях имеет место следующая теорема:

* В известных мне доказательствах теоремы Лиувилля предполагается, что функции (1) трижды дифференцируемы, однако нетрудно показать (используя принцип Дирихле), что из принятых нами условий на (1) и из $p \equiv 1$ автоматически вытекает неограниченная дифференцируемость всех функций (1).

Теорема 1. Если при отображении (1)

$$B = f(A)$$

единичной сферы S на часть единичной сферы имеем

$$0 \leq p - 1 < \varepsilon,$$

то найдется лувиллевское отображение (2) такое, что в сфере радиуса r , $r < 1$ (концентрической S), будем иметь

$$|f(A) - L(A)| < \mu(\varepsilon, k, \alpha, r),$$

где μ — универсальная функция, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon, k, \alpha, r) = 0.$$

Доказательство приведенной теоремы основано на известных свойствах квази-комформных отображений плоских областей. Этот метод не дал возможности выяснить вид функции μ , а также не дает ответа на вопрос: нельзя ли заменить в условиях теоремы универсальную функцию $\mu = \nu(\varepsilon, k, \alpha, r)$ универсальной функцией $\nu = \nu(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu(\varepsilon) = 0$, зависящей только от ε ?

Получить указанные уточнения удалось только для отображений с осевой симметрией.

2. Пусть область D есть единичный бесконечный цилиндр

$$C: y^2 + z^2 < 1; \quad (3)$$

обозначим через $B = kA + a$ линейное преобразование пространства $A: u = kx + a$, $v = ky$, $w = kz$, где $k > 0$, а a — произвольное действительное число. При этих обозначениях имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Если отображение (1)

$$B = f(A)$$

единичного цилиндра (3) на часть единичного цилиндра $v^2 + w^2 < 1$ обладает осевой симметрией и если

$$0 \leq p - 1 < \varepsilon,$$

то найдется линейное преобразование $kA + a$ такое, что в цилиндре C будем иметь

$$|f(A) - (kA + a)| < \mu(k, \alpha, x)\varepsilon, \quad (4)$$

где μ — универсальная функция координаты x и параметров условия Гельдера k и α .

В условиях теоремы правую часть (4) можно заменить выражением $\lambda(x)\nu(\varepsilon)$

$$|f(A) - (kA + a)| < \lambda(x)\nu(\varepsilon),$$

где λ и ν — две универсальные функции.

Поступило
4 II 1954