

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 II 1954)

Настоящая заметка посвящена изучению некоторых общих свойств дифференцируемых отображений областей евклидовых пространств. В первой части рассматриваются качественные свойства, во второй — метрические свойства указанных отображений.

Пусть E^n — n -мерное евклидово пространство; G — область в нем; f — дифференцируемое отображение области G снова в E^n ; J — якобиан отображения f ; G_0 — множество нулей якобиана. Отображение f , у которого якобиан не меняет знака, называется ориентированным.

Теорема 1. Сильный принцип сохранения области. Пусть f — ориентированное отображение и G_0 есть изолированное в G множество. Тогда для любой подобласти $\Gamma \subseteq G$ ее образ $f(\Gamma)$ также есть область.

Следствие. Сильный принцип минимума и максимума. Пусть в дополнение к условиям теоремы f непрерывна на замкнутой области $\bar{G}$; тогда максимум, а если $|f(x)| \neq 0$ * на G , то и минимум $|f(x)|$ достигается только на границе области G .

Теорема 2. Слабый принцип сохранения области. Пусть f — ориентированное отображение, множество G_0 не имеет внутренних точек и все полные прообразы $f^{-1}(y)$ суть ограниченные замкнутые множества; тогда образ области G при отображении f также есть область.

Следствие. Слабый принцип максимума. Пусть в дополнение к условиям теоремы отображение f непрерывно на замкнутой области $\bar{G}$; тогда максимум $|f(x)|$ достигается во всяком случае на границе области G .

Отметим, что обобщение этого следствия на случай отображений в пространстве меньшего числа измерений можно найти в работе автора ⁽¹⁾, а в приведенном здесь виде оно было получено ранее А. М. Роднянским ⁽²⁾.

В следующих теоремах 3 и 4 граница σ области G состоит из конечного числа замкнутых топологических $(n-1)$ -мерных псевдомногообразий, истинный цикл z есть какая-либо из двух возможных ориентаций границы σ области G , через $\nu[f(z), y]$ обозначается коэффициент зацепления цикла $f(z)$ с точкой $y \in E^n$. Отображение f предполагается непрерывным на замкнутой области $\bar{G}$.

Теорема 3. Слабый принцип минимума. Пусть f — ориентированное отображение, G_0 не имеет внутренних точек, o — начало координат пространства E^n и $\nu[f(z), o] = 0$. Тогда

$$|f(x)| \geq \min_{\xi \in \sigma} |f(\xi)| > 0$$

для всех $x \in \bar{G}$.

* Через $|f(x)|$ мы обозначаем модуль радиус-вектора с началом в начале координат и концом в точке $f(x)$.

Теорема 4. Принцип соответствия границ. Пусть f — ориентированное отображение, G_0 — изолированное множество и отображение отображает границу σ области G взаимно-однозначно на границу σ' некоторой области G' . Тогда отображение f есть взаимно-однозначное отображение $\bar{G}$ на $\bar{G}'$.

Возвратимся теперь снова к исходным предпосылкам. Сформулируем теорему, являющуюся в известном смысле обобщением классической теоремы Руше для случая дифференцируемых отображений и очень полезную при доказательстве ряда теорем. Через $U_r(x)$ будем обозначать шар радиуса r с центром в точке x , а через $S_r(x)$ — сферу, его границу.

Теорема 5. Пусть $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, $J(x^{(0)}) \neq 0$ и g — непрерывное отображение области G в E^n . Тогда для достаточно малых $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что из $\rho[f(x), g(x)] < \varepsilon$ для $x \in S_\delta(x^{(0)})$ следует:

$$f[U_\delta(x^{(0)})] \supseteq U_\varepsilon(y^{(0)}), \quad g[U_\delta(x^{(0)})] \supseteq U_\varepsilon(y^{(0)}).$$

Из этой теоремы легко получается обобщение теоремы Гурвица.

Теорема 6. Пусть $y^{(0)} \in f(G)$ и во всех точках полного прообраза точки $y^{(0)}$ якобиан J отображения f отличен от нуля. Пусть, далее, g_k — последовательность непрерывных отображений ($k=1, 2, \dots$) — равномерно внутри области G сходится к отображению f . Тогда, если при каждом отображении g_k полный прообраз точки $y^{(0)}$ состоит не более чем из r точек, то и полный прообраз $f^{-1}(y^{(0)})$ состоит не более чем из r точек.

Теорема 7. Пусть последовательность взаимно-однозначных непрерывных отображений g_k ($k=1, 2, \dots$) равномерно внутри области G сходится к f . Тогда якобиан J отображения f не меняет знака, а если множество нулей якобиана предельного отображения есть изолированное множество, то предельное отображение также взаимно-однозначно.

Очевидно, что это есть обобщение хорошо известной теоремы о пределе последовательности однолистных аналитических функций, которая содержится в нашей как частный случай.

Заметим, что теорема 6 может быть с успехом применена к оценке якобиана предельного отображения через якобианы сходящейся последовательности:

Теорема 8. Пусть последовательность дифференцируемых отображений f_n области G сходится равномерно внутри G к дифференцируемому отображению f ; тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \iint \dots \int |J_n(x)| dG \geq \iint \dots \int |J(x)| dG$$

(здесь J_n — якобиан отображения f_n , $n=1, 2, \dots$).

Основным аппаратом при доказательстве перечисленных теорем является аппарат обычной геометрической теории функций действительного переменного и аппарат степени непрерывных отображений, который применяется методами, развитыми, например, в работах автора (1, 3). Приложение указанных результатов можно найти в заметке автора (4). Отметим, что полученные утверждения легко обобщаются на специальные классы просто непрерывных отображений. Для получения соответствующих формулировок надо вместо якобиана $J(x)$ рассматривать степень отображения $\gamma(x)$, в частности, под G_0 понимать множество точек G , в которых степень отображения обращается в нуль. В теоремах 2 и 3 надо еще потребовать, чтобы $f(G_0)$ не имело внутренних точек. В теореме 8 интеграл $\iint \dots \int |J(x)| dG$ следует за-

менить вариацией отображения f (см. заметку автора ⁽⁵⁾). Укажем, наконец, что условия теорем 1—7 необходимы в том смысле, что при отказе от какого-либо из них сформулированные утверждения, вообще говоря, перестают быть верными, что подтверждается соответствующими примерами.

Рассмотрим теперь одну вариационную задачу теории отображений. При дифференцируемом отображении f области G каждый бесконечно малый шар $U_r(x)$, $x \in G$, переходит в бесконечно малый эллипсоид с полуосями ρ_i , где $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n$. Положим $\lambda_i = \rho_i / r$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и назовем λ_i собственными значениями отображения f в точке x .

Теорема 9. *Отображение области G , осуществляющее минимум функционала*

$$\Phi(f) = \iint \dots \int (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2) dG$$

в классе непрерывно дифференцируемых отображений, у которых фиксировано граничное отображение, есть гармоническое отображение области G . (Мы предполагаем при этом, что область G такова, что для нее имеет место классический принцип Дирихле.)

В заключение перейдем к метрическим теоремам для отображения f , снова удовлетворяющего только тем требованиям, которые сформулированы в начале статьи.

Теорема 10. *Множество $D \subseteq f(G)$ имеет лебеговскую меру нуль тогда и только тогда, когда*

$$\text{mes}[f^{-1}(D) \setminus G_0] = 0.$$

Теорема 11. *Множество $D \subseteq f(G)$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо множество $f^{-1}(D) \setminus G_0$.*

Теорема 12 (о точках плотности). *Для почти всех точек $x \in E \setminus G_0$, где E — произвольное измеримое множество, $E \subseteq G$, имеет место:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes}[f(U_r(x) \cap E)]}{\text{mes} f[U_r(x)]} = 1.$$

Следствие. *Для почти всех $x \in E \setminus G_0$ имеет место*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{mes}[fU_r(x) \cap E]}{\text{mes}[U_r(x) \cap E]} = |J(x)|.$$

Теорема 13. *Существует разбиение множества $G \setminus G_0$ на попарно не пересекающиеся B -множества (класса не выше второго) $E_0, E_1, E_2, \dots$: $G \setminus G_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ такие, что $\text{mes} E_0 = 0$, а на каждом E_k ($k = 1, 2, \dots$) отображение f взаимно-однозначно.*

Теоремы 10—13 доказываются обычным методом теории функций действительного переменного и находят свое применение, например, при нахождении критериев суммируемости степеней якобиана, при изучении обобщенного интеграла Стильтьеса от функции по отображению, в замене переменного в кратном интеграле и т. п.

Московский физико-технический
институт

Поступило
8 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Д. Кудрявцев, Матем. сборн., 32 (74): 3, 493 (1953). ² А. М. Роднянский, ДАН, 72, № 1, 15 (1950). ³ Л. Д. Кудрявцев, Матем. сборн., 33 (75): 2, 389 (1953). ⁴ Л. Д. Кудрявцев, ДАН, 92, № 3, 469 (1953). ⁵ Л. Д. Кудрявцев, Усп. матем. наук, 8, № 2 (54), 164 (1953).