

Н. И. КОВАНЦОВ

К ПРОЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

(Представлено академиком Н. С. Александровым 6 II 1954)

Отнеся линейчатый комплекс к некоторому подвижному тетраэдру $A_1A_2A_3A_4$ и определяя инфинитезимальные перемещения вершин этого тетраэдра равенствами

$$dA_i = \omega_{ik} A_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \quad (1)$$

мы выделим главные формы $\omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{23}, \omega_{24}$, если поместим вершины A_1, A_2 на луче комплекса. Между четырьмя формами при трехмерности рассматриваемого линейчатого многообразия (комплекса) должно существовать некоторое линейное соотношение, которое примет вид

$$\omega_{13} + \omega_{24} = 0, \quad (2)$$

если в качестве координатных плоскостей $(A_1A_2A_3)$ и $(A_1A_2A_4)$ взять плоскости, соответствующие на луче комплекса вершинам A_1A_2 (соответственно) и определенным образом нормировать координаты вершин тетраэдра. При этом плоскость, соответствующая на луче точке $M = A_1 + tA_2$, будет определяться тангенциальными координатами

$$\sigma = (A_1A_2A_3) + t(A_1A_2A_4). \quad (3)$$

Дифференцируя (2) внешним образом и развертывая получающееся при этом квадратичное соотношение по лемме Картана, получим следующую систему линейных тождеств:

$$\begin{aligned} \omega_{21} - \omega_{43} &= x_1\omega_{14} + x_2\omega_{24} + x_3\omega_{23}, \\ \omega_{22} - \omega_{44} + \omega_{33} - \omega_{11} &= x_2\omega_{14} + x_4\omega_{24} + x_5\omega_{23}, \\ \omega_{12} - \omega_{34} &= x_3\omega_{14} + x_5\omega_{24} + x_6\omega_{23}. \end{aligned} \quad (4)$$

Зададим произвольную линейчатую поверхность комплекса уравнениями

$$\omega_{23} = p\omega_{24}, \quad \omega_{14} = q\omega_{24}, \quad (5)$$

где p и q могут быть, очевидно, произвольными функциями луча. Известно, что на каждом луче такой поверхности существуют две точки, в которых касательная плоскость поверхности совпадает с соответствующими этим точкам плоскостями комплекса (см., например, (1)). Назовем эти точки точками прикосновения поверхности (5). Найдя

$$\begin{aligned} dM &= (\omega_{11} + t\omega_{21})A_1 + (\omega_{12} + t\omega_{22} + dt)A_2 + \\ &+ (\omega_{13} + t\omega_{23})A_3 + (\omega_{14} + t\omega_{24})A_4, \end{aligned} \quad (6)$$

мы получим тангенциальные координаты касательной плоскости поверхности (5) в точке M :

$$(A_1A_2dM) = \omega_{24} [(-1 + tp)(A_1A_2A_3) + (q + t)(A_1A_2A_4)]. \quad (*)$$

Сравнивая их с координатами (3), мы приходим к квадратному уравнению, определяющему точки прикосновения:

$$pt^2 - 2t - q = 0. \quad (7)$$

Заметим, что развертывающиеся поверхности, характеризующиеся совпадением точек прикосновения, будут соответствовать равенству $pq + 1 = 0$. Впредь развертывающиеся поверхности комплекса мы будем исключать из рассмотрения.

Если точка M описывает некоторую линию s на поверхности (5), то плоскость (3), соответствующая в комплексе этой точке, будет огибать развертывающуюся поверхность, образующая которой определится как линия пересечения плоскости (3) и бесконечно близкой к ней, т. е. уравнениями:

$$(R, A_1, A_2, A_3 + tA_4) = 0, \quad d(R, A_1, A_2, A_3 + tA_4) = 0, \quad (8)$$

где R — текущая точка. Если $R = A_1 + \lambda A_2 + \eta(\beta A_2 + A_3 + tA_4)$ — уравнение искомой образующей (η — произвольный параметр; λ, β — неизвестные коэффициенты, следовательно, $P = A_1 + \lambda A_2$ — точка, в которой образующая пересекает луч комплекса), то, подставляя значение R во второе уравнение (8) и приравняв нулю коэффициент при η и свободный член, получим два соотношения для определения λ и β :

$$p\lambda t - (\lambda + t) - q = 0, \quad (9)$$

$$\beta(-t\omega_{23} + \omega_{24}) + (\omega_{34} + t\omega_{44} + dt - t\omega_{33} - t^2\omega_{43}) = 0. \quad (10)$$

Сравнивая уравнения (7) и (9), замечаем, что соответствие точек M и P является инволюцией, двойными точками которой служат точки прикосновения поверхности (5).

Далее, пользуясь равенством (9), можно представить соотношение (*) в виде:

$$\rho(A_1 A_2 dM) = (A_1 A_2 A_3) + \lambda(A_1 A_2 A_4)$$

(ρ — модуль пропорциональности), откуда видно, что касательная плоскость поверхности (5) в точке M является плоскостью, соответствующей в комплексе точке P . Аналогично можно показать, что касательная плоскость поверхности (5) в точке P соответствует в комплексе точке M .

Плюккеровы координаты e образующей (8) и m -касательной к линии s на поверхности (5) имеют следующий вид:

$$e = (A_1 + \lambda A_2, \beta A_2 + A_3 + tA_4) = a(A_1 + \lambda A_2, P_3 + tA_4), \quad (11)$$

$$m = (A_1 + tA_2, dM) = a(A_1 + tA_2, Q_3 + \lambda A_4), \quad (12)$$

где $a = -t\omega_{23} + \omega_{24}$, $P_3 = A_3 + \frac{A}{a} A_2$, $A = t^2\omega_{43} + t(\omega_{33} - \omega_{44}) - \omega_{34} - dt$, $Q_3 = A_3 + \frac{B}{a} A_2$, $B = t^2\omega_{21} + t(\omega_{11} - \omega_{22}) - \omega_{12} - dt$.

Главные поверхности комплекса. Точки луча, в которых совпадают прямые (11) и (12), характеризуются пропорциональностью коэффициентов при $(A_i A_k)$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$). Сравнивая равенства (11) и (12), обнаружим, что указанное совпадение будет иметь место в точках, которые определяются следующими квадратными уравнениями:

$$pt^2 - 2t - q = 0, \quad (13)$$

$$t^2(\omega_{21} - \omega_{43}) - t(\omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{44}) - (\omega_{12} - \omega_{34}) = 0. \quad (14)$$

При помощи равенств (4) и (5) последнее уравнение можно представить в виде:

$$t^2(x_1q + x_2 + x_3p) - t(x_2q + x_4 + x_5p) - (x_3q + x_5 + x_6p) = 0. \quad (14')$$

Требование совместности уравнений (13) и (14') приводит нас к пропорциональности коэффициентов

$$\frac{x_1q + x_2 + x_3p}{p} = \frac{x_2q + x_4 + x_5p}{2} = \frac{x_3q + x_5 + x_6p}{q} = s, \quad (15)$$

где через s обозначена общая величина отношения. Перепишав уравнения (15) в виде

$$\begin{aligned} x_1q + x_2 + (x_3 - s)p &= 0, & x_2q + x_4 - 2s + x_5p &= 0, \\ (x_3 - s)q + x_5 + x_6p &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

придем к условию их совместности:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - s \\ x_2 & x_4 - 2s & x_5 \\ x_3 - s & x_5 & x_6 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

В силу сходства этого уравнения с характеристическим уравнением элементарной теории поверхностей второго порядка будем называть его характеристическим уравнением комплекса. Отличие этого уравнения от соответствующего уравнения теории поверхностей второго порядка будет состоять лишь в том, что неизвестное s располагается у него не по первой, а по второй диагонали определителя. Это обстоятельство является существенным, ибо попытки расположить неизвестное по первой диагонали неизбежно ведут к асимметрии определителя, которую нельзя исправить никакой перестановкой равенств (4).

Линейчатые поверхности, определяемые уравнением (17), назовем главными поверхностями комплекса. Такие поверхности были отмечены Клейном (4). Исследование характеристического уравнения приводит к следующей проективной классификации комплексов:

1. Уравнение имеет три различных корня $s_1 \neq s_2$, $s_2 \neq s_3$, $s_3 \neq s_1$. Комплекс содержит три главных поверхности, каждая из которых соответствует определенному корню характеристического уравнения.

2. Уравнение имеет два равных корня $s_1 = s_2 \neq s_3$. По аналогии с теорией поверхностей второго порядка такой комплекс можно было бы назвать комплексом проективного вращения. Подстановка кратного корня в уравнения (16) выделяет из них лишь одно независимое. Главная поверхность становится неопределенной.

3. Характеристическое уравнение имеет три равных корня $s_1 = s_2 = s_3$. Подстановка трехкратного корня в уравнения (16) обращает их в тождества. Любая поверхность комплекса является главной. Чтобы выяснить свойства комплекса, обратим внимание на то, что у главных поверхностей линия s описывается точками прикосновения, причем касательная плоскость поверхности является соприкасающейся плоскостью этой линии. Следовательно, линия прикосновения s является асимптотической линией главной поверхности. Единственным же комплексом, все линейчатые поверхности которого имеют линии прикосновения своими асимптотическими линиями, является линейный комплекс (2).

Таким образом, комплексом, характеристическое уравнение которого имеет трехкратный корень, является линейный комплекс. Линейный комплекс соответствует в про-

ективной области сфере метрической теории поверхностей второго порядка.

Отметим, между прочим, условия, характеризующие линейный комплекс:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad 2x_3 = x_4. \quad (18)$$

Беря две главных поверхности (p_1, q_1) и (p_2, q_2) , соответствующие двум неравным корням характеристического уравнения, можно показать, что для них выполняются следующие два соотношения:

$$p_1 q_2 + q_1 p_2 + 2 = 0, \quad (19)$$

$$x_1 q_1 q_2 + x_4 + x_6 p_1 p_2 + x_2 (q_1 + q_2) + x_3 (p_1 q_2 + q_1 p_2) + x_5 (p_1 + p_2) = 0. \quad (20)$$

Первое равенство естественно назвать условием проективной перпендикулярности, второе — условием проективной сопряженности двух линейчатых поверхностей комплекса. Что касается условия проективной перпендикулярности, то оно уже известно в литературе под названием гармонического пересечения поверхностей⁽³⁾. Две поверхности, связанные условием проективной перпендикулярности, обладают тем свойством, что проективные пучки их касательных плоскостей вдоль общей образующей находятся в инволюции. Отметим некоторые свойства проективно перпендикулярных поверхностей:

1. Поверхности, проективно перпендикулярные самим себе, являются развертывающимися ($pq + 1 = 0$).

2. Необходимым и достаточным условием гармонической сопряженности пар точек прикосновения двух линейчатых поверхностей является проективная взаимная перпендикулярность этих поверхностей.

Условие проективной взаимной сопряженности двух линейчатых поверхностей можно было бы описать следующим образом. Если потребовать полной симметрии прямых (11) и (12) относительно точек M и P , то это приведет к равенству $P_3 = Q_3$, или $A = B$. Последнее же после небольших преобразований примет вид:

$$t^2(x_1 q + x_2 + x_3 p) - t(x_2 q + x_4 + x_5 p) - (x_3 q + x_5 + x_6 p) = 0. \quad (21)$$

Следовательно, требуемая симметрия будет иметь место лишь в двух точках, координаты которых определяются квадратным уравнением (21). Назовем их точками симметрии поверхности (p, q) . Можно показать, что необходимым и достаточным условием проективной взаимной сопряженности двух линейчатых поверхностей является гармоническая сопряженность пары точек симметрии одной поверхности и пары точек прикосновения другой.

Все поверхности комплекса, проективно сопряженные с некоторой поверхностью (p, q) при выполнении определенных условий интегрируемости для p и q образуют некоторую конгруэнцию, которую назовем конгруэнцией, сопряженной поверхности (p, q) . Эту конгруэнцию можно считать аналогом диаметральной плоскости поверхности второго порядка, сопряженной некоторому направлению. Фокусы конгруэнции, сопряженной поверхности (p, q) , совпадают с точками симметрии этой поверхности.

Поступило
9 XI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ E. Vessiot, Lecons de géométrie supérieure, Paris, 1919. ² E. Picard, Ann. de l'Ec. Normale, 6, Octobre (1877). ³ M. A. Акивис, ДАН, 61, № 2 (1948). ⁴ F. Klein, Math. Ann., 5, 271 (1872).