

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. ИЛЬИН

**ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ
ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ УГЛОВЫЕ ЛИНИИ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 IV 1954)

Предлагаемая работа посвящена развитию приближенного метода решения задач электродинамики для произвольных хорошо проводящих цилиндрических тел, имеющих конечное число угловых линий.

В работе доказывается, что при наличии у неидеально проводящего цилиндрического тела угловых линий в решении появляется добавочный член, дающий учет влияния угловых линий и имеющий логарифмическую особенность на угловых линиях. Так как все другие члены в решении ограничены, то отсюда следует, что в окрестности угловых линий найденный добавочный член превалирует над всеми прочими членами и является определяющим. Это обстоятельство не учитывалось рядом авторов (^{1,2}), вследствие этого отклонение найденного этими авторами решения от правильного результата делается сколь угодно большим в окрестности угловых линий.

1. Рассмотрим два типа краевых задач: задачу о диффракции электромагнитных волн от точечного источника или от „светящейся линии“ на цилиндрическом теле произвольного сечения, обладающем хорошей, но неидеальной проводимостью, и задачу о возбуждении неидеального цилиндрического радиоволновода произвольного сечения. Укажем метод решения этих задач, если известно решение соответствующих задач с идеальной проводимостью. В дальнейшем выяснится, что существенную роль имеет вопрос о наличии у цилиндрической поверхности угловых линий.

В этом пункте мы рассмотрим гладкие поверхности, не имеющие угловых линий. На границе хорошо проводящего тела и диэлектрика имеют место приближенные краевые условия М. А. Леонтовича (³). Известны краевые условия Леонтовича 1-го, 2-го и 3-го порядков (последние впервые выписаны О. И. Панычем (⁴)), справедливые с точностью до членов, соответственно, 1-го, 2-го и 3-го порядков относительно ϖ (где ϖ равно отношению волновых чисел k/k_0 в воздухе и в проводящей среде).

Мы укажем метод, позволяющий, опираясь на краевые условия 1-го, 2-го и последующих порядков, последовательно найти решение с точностью до членов 1-го, 2-го и последующих порядков относительно ϖ .

Проиллюстрируем решение на примере плоской задачи диффракции. Вводя поляризационные потенциалы $\vec{\Pi}_1(0, 0, \Pi_1)$ и $\vec{\Pi}_2(\Pi_2, 0, 0)$,

получим для этих потенциалов краевые условия Леонтовича 1-го порядка в виде:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial n} = \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{c} w \Pi_2; \quad \Pi_1 = \frac{c\mu}{i\omega\mu_0} w \frac{\partial \Pi_1}{\partial n}. \quad (1)$$

Потенциалы Π_1 и Π_2 удовлетворяют волновому уравнению, условию излучения на бесконечности и имеют логарифмическую особенность в точке M_0 , представляющей след «светящейся линии».

Остановимся на нахождении потенциала Π_2 . Пусть $\bar{\Pi}_2$ обозначает потенциал соответствующей «идеальной» задачи. Применяя формулу Грина к двум функциям $\Pi_2(M, M_0)$ и $\bar{\Pi}_2(M, P)$ в плоской области, внешней по отношению к контуру Γ , образованному пересечением цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной оси, получим, используя краевое условие (1)

$$\Pi_2(P, M_0) = \bar{\Pi}_2(P, M_0) + \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{2\pi c} w \int_{\Gamma} \bar{\Pi}_2(P, M) \cdot \bar{\Pi}_2(M, M_0) ds_M. \quad (2)$$

Формулу (2) кратко можно записать в виде

$$\Pi_2(P, M_0) = \bar{\Pi}_2(P, M_0) + O(w). \quad (3)$$

Формула (3) или (2) имеет место для любой точки P , не лежащей на контуре Γ . Однако, в силу непрерывности потенциала, равенство (3) будет справедливо и для точки P , лежащей на контуре Γ . Подставляя краевое значение (3) в формулу (2), получим с точностью до членов 1-го порядка относительно w :

$$\begin{aligned} \Pi_2(P, M_0) = & \bar{\Pi}_2(P, M_0) + \\ & + \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{2\pi c} w \int_{\Gamma} \bar{\Pi}_2(P, M) \cdot \bar{\Pi}_2(M, M_0) ds_M + O(w^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Члены $O(w^2)$, по крайней мере для ограниченного контура Γ , представляют собой равномерно ограниченную величину, умноженную на w^2 .

Для нахождения потенциала Π_2 с точностью до членов 2-го порядка относительно w нужно исходить из краевого условия не 1-го, а 2-го порядка, ибо только последнее гарантирует требуемую точность.

Краевые условия 2-го порядка для потенциалов Π_1 и Π_2 имеют вид:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial n} = \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{c} w \left(1 + \frac{\kappa}{2ik} w\right) \Pi_2; \quad \Pi_1 = \frac{c\mu}{i\omega\mu_0} w \left(1 - \frac{\kappa}{2ik} w\right) \frac{\partial \Pi_1}{\partial n}. \quad (5)$$

Здесь κ — кривизна контура Γ .

Применяя формулу Грина к двум функциям $\Pi_2(M, M_0)$ и $\bar{\Pi}_2(M, P)$ и используя краевое условие (5) и формулу (4), справедливую вследствие непрерывности потенциала простого слоя и для точек P , лежащих на контуре Γ , получим с точностью до членов 2-го порядка относительно w :

$$\begin{aligned} \Pi_2(P, M_0) = & \bar{\Pi}_2(P, M_0) + \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{2\pi c} w \int_{\Gamma} \bar{\Pi}_2(P, M) \cdot \bar{\Pi}_2(M, M_0) ds_M + \\ & + \left(\frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{2\pi c}\right)^2 w^2 \iint_{\Gamma\Gamma} \bar{\Pi}_2(P, M) \cdot \bar{\Pi}_2(M, N) \cdot \bar{\Pi}_2(N, M_0) ds_M ds_N + \\ & + \frac{\varepsilon\mu_0\omega}{4\pi kc} w^2 \int_{\Gamma} \kappa(M) \cdot \bar{\Pi}_2(P, M) \cdot \bar{\Pi}_2(M, M_0) ds_M. \end{aligned} \quad (6)$$

Совершенно аналогично отыскивается потенциал Π_1 (нужно применить формулу Грина к двум функциям $\Pi_1(M, M_0)$ и $\bar{\Pi}_1(M, P)$). С точностью до членов 2-го порядка относительно w этот потенциал имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_1(P, M_0) = & \bar{\Pi}_1(P, M_0) - \frac{c\mu}{2\pi i \omega \mu_0} w \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{\Pi}_1}{\partial n_M}(P, M) \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}_1}{\partial n_M}(M, M_0) ds_M + \\ & + \left(\frac{c\mu}{2\pi i \omega \mu_0} \right)^2 w^2 \iint_{\Gamma \Gamma} \frac{\partial \bar{\Pi}_1}{\partial n_M}(P, M) \cdot \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_1}{\partial n_M \partial n_N}(M, N) \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}_1}{\partial n_N}(N, M_0) ds_M ds_N - \\ & - \frac{c\mu}{4\pi \omega \mu_0 k} w^2 \int_{\Gamma} \kappa(M) \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}_1}{\partial n_M}(P, M) \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}_1}{\partial n_M}(M, M_0) ds_M. \end{aligned} \quad (7)$$

Приведенный нами метод позволяет принципиально найти решение с любой степенью точности относительно w . При этом мы опираемся на то, что краевые условия сколь угодно высокого порядка могут быть получены методом, используемым в работе (4). Однако расчет приближений более высокого порядка приводит к громоздким вычислениям, которые мы не будем здесь приводить.

Мы привели решение задачи о диффракции от «светящейся линии». Совершенно аналогично решается задача о диффракции от точечного источника и задача о возбуждении цилиндрического волновода. Все отличие будет состоять в том, что, кроме интегрирования по контуру Γ , для трехмерных задач следует произвести еще интегрирование по z от $-\infty$ до $+\infty$. В соответствии с этим множитель $\frac{1}{2\pi}$, характерный

для двумерной формулы Грина, всюду заменится на $\frac{1}{4\pi}$. Так как задача о возбуждении волновода является внутренней, то для нее контур Γ следует обходить против часовой стрелки.

2. Предположим теперь, что цилиндрическая поверхность имеет N угловых линий. Этим угловым линиям соответствуют угловые точки контура Γ , которые мы обозначим $S_1, S_2, \dots, S_N$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ — углы между касательными в угловых точках $S_1, S_2, \dots, S_N$, соответственно. (Угол между касательными измеряется с внешней стороны, если рассматривается внешняя задача.)

Учет влияния угловых линий невозможно произвести, исходя из дифференциальной постановки задачи (т. е. решая дифференциальное уравнение с краевыми условиями какого-либо порядка), так как краевые условия 1-го порядка совсем не зависят от кривизны контура Γ , а краевые условия 2-го и последующих порядков содержат кривизну контура κ , обращающуюся в бесконечность на угловых линиях.

Мы решим задачу для поверхности с угловыми линиями следующим образом: сгладим контур Γ в окрестности угловых точек (для такого контура решение нами получено и определяется формулами (6) и (7)) и затем перейдем к пределу, стягивая участок, на котором производится сглаживание, в точку. Мы получим, что для контура Γ , имеющего N угловых точек, потенциал Π_2 определяется формулой (6), в которую следует добавить член вида:

$$- \frac{\varepsilon \mu_0 \omega}{4\pi k c} w^2 \sum_{l=1}^N |\pi - \alpha_l| \cdot \bar{\Pi}_2(P, S_l) \cdot \bar{\Pi}_2(S_l, M_0) \quad (8)$$

(для задачи о диффракции от «светящейся линии»).

Для трехмерных задач добавочный член имеет вид

$$\mp \frac{\varepsilon \mu_0 \omega}{8\pi k c} w^2 \sum_{l=1}^N |\pi - \alpha_l| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Pi}_2(P, \zeta, S_l, z) \cdot \bar{\Pi}_2(S_l, z, M_0, \zeta_0) dz, \quad (9)$$

где знак — берется для внешней задачи, а знак + для внутренней. Найденный добавочный член элементарно выражается через известное решение «идеальной» задачи и имеет логарифмическую особенность на угловых линиях. Легко видеть, что все другие члены в формуле (6) являются ограниченными (как потенциалы простого слоя). Таким образом, найденный добавочный член в окрестности угловых линий является определяющим, так что всеми прочими членами можно в сравнении с ним пренебречь. Легко оценить «зону действия» добавочного члена: для металлов она ничтожно мала, в то время как для сред со «средней» проводимостью (морская вода, влажная почва) «зона действия» имеет порядок, сравнимый с длиной волны в воздухе. Указанный здесь метод обобщается на случай, когда проводимость не постоянна, а является произвольной функцией точек поверхности, непрерывной в окрестности угловых линий, и даже на случай, когда проводимость терпит разрыв на угловой линии. В последнем случае добавочный член будет содержать произвольный постоянный множитель, для определения которого следует поставить дополнительное условие на угловой линии.

Полученные результаты имеют значение для теории береговой рефракции и ряда других задач. Для электрического потенциала Π_1 формула (7) остается верной и для поверхности с угловыми линиями (т. е. добавочный член равен нулю) в предположении, что все углы α_l не превосходят π . Таким образом, магнитный потенциал Π_2 и электрический потенциал Π_1 ведут себя существенно различным образом при наличии у поверхности угловых линий.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову.

Поступило
6 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Д. Малюжинец, Диссертация, ФИАН, 1951; Автореферат, Изд. АН СССР.
- ² Б. З. Каценеленбаум, ДАН, 88, № 1, 37 (1953). ³ М. А. Леонтович, Исследования по распространению радиоволн, сборн. 2, Изд. АН СССР, 1948, стр. 5.
- ⁴ О. И. Паныч, ДАН, 70, № 4, 589 (1950).