

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД и Р. А. МИНЛОС

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

В этой заметке дается в замкнутом виде решение уравнений квантованных полей. Решение этих уравнений требует нового, быть может несколько непривычного на первый взгляд, математического аппарата. По всей видимости, пользование этим или аналогичным математическим аппаратом неизбежно для современной квантовой электродинамики. С другой стороны, обращение с приводимым здесь, по существу очень простым, аппаратом не представляет трудностей. Мы изложим здесь эту методику наиболее примитивно, чтобы в этой, первой заметке не осложнять дело математическими тонкостями.

Изложим метод для простейшего случая, так называемого уравнения Тиринга. В конце заметки будет указано, как этот метод распространяется на другие поля.

Уравнение Тиринга имеет вид

$$\square \psi(x) - x^2 \psi(x) = \lambda \psi^2(x) + J(x),$$

$J(x)$ — внешний ток; $\psi(x)$ — оператор поля частицы; $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ — точка четырехмерного пространства — времени.

Для наших целей очень существенно перейти от уравнения в операторах к швингеровской форме уравнений в функционалах от внешнего тока $J(x)$ ⁽¹⁾. Мы не будем пользоваться здесь самими уравнениями Швингера для функций Грина, операторов массы и т. д., поскольку можно доказать, что эта система уравнений не полна (она имеет бесконечное число решений, зависящее от произвольных функций), а выведем другие уравнения, из которых следуют сами уравнения Швингера. Серьезным преимуществом уравнений, которые мы получим, является для нас тот факт, что эти уравнения линейны.

Обозначим, следуя Швингеру, через $\langle f \rangle$ среднее нормированное значение оператора f по вакууму ⁽¹⁾. Исходное уравнение примет вид

$$(\square - x^2) \langle \psi(x) \rangle = \lambda \langle \psi^2(x) \rangle + J(x). \quad (1)$$

Здесь среднее значение $\langle \psi(x) \rangle$ есть функционал от $J(x)$, подлежащий определению.

Наша цель — линейаризировать эти уравнения. Это можно сделать следующим образом. Пусть $\mathcal{L}$ — функция Лагранжа (действие) нашего поля. Она имеет вид $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \int J \psi d^4x$, где $\mathcal{L}_1$ — члены лагранжиана, не содержащие $J(x)$. Отсюда $\delta \mathcal{L} = \int \psi \delta J d^4x$, где $\delta \mathcal{L}$ — вариация $\mathcal{L}$, возникшая от вариации δJ , при этом ψ удовлетворяет уравнению (1); значит, $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta J(x)} = \psi(x)$. Имеет место формула ⁽¹⁾

$$-i \frac{\delta \langle f \rangle}{\delta J} = \left\langle f \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta J} \right\rangle_+ - \langle f \rangle \left\langle \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta J} \right\rangle, \quad (2)$$

где f — какой-либо оператор, не зависящий явно от $J(x)$; $\left\langle f \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta J} \right\rangle_+$ означает среднее от хронологически упорядоченного произведения. Если же оператор зависит от J явно, то добавляется еще производная по J .

Введем в уравнение новую неизвестную функцию*

$$z = \langle e^{-i\mathcal{L}} \rangle^{-1}.$$

Тогда, применяя формулу (2), учитывая, что $e^{-i\mathcal{L}}$ зависит явно от J и замечая, что $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta J(x)} = \langle \psi(x) \rangle$, получим $-i \frac{\delta z}{\delta J(x)} = z \langle \psi(x) \rangle$. Из формулы (2) следует опять, что

$$\begin{aligned} -\frac{\delta^2 z}{(\delta J(x))^2} &= -\frac{i\delta}{\delta J(x)} [\langle \psi(x) \rangle z] = \\ &= z (\langle \psi^2(x) \rangle - \langle \psi(x) \rangle^2 + \langle \psi(x) \rangle^2) = z \langle \psi^2(x) \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Значит, умножив обе части уравнения (1) на z , мы получим

$$-i(\square - \kappa^2) \frac{\delta z}{\delta J(x)} + \lambda \frac{\delta^2 z}{[\delta J(x)]^2} = J(x) z. \quad (4)$$

Это уравнение уже линейно.

Для того чтобы решить это уравнение, будем приближенно считать, что функция $J(x)$ задана в узлах некоторой пространственно-временной решетки и, кроме того, имеет период l по всем координатам. В дальнейшем шаг решетки будем стремиться к нулю, а период l к бесконечности. Итак, функция $J(x)$ заменяется конечным набором чисел $J_0, J_1, \dots, J_n$, где $n+1$ — число узлов решетки в ящике с периодом l . Функционал z заменяется при этом функцией $z(J_0, J_1, \dots, J_n)$ от $n+1$ переменного. При этом функциональная производная $\frac{\delta z}{\delta J(x)}$ переходит в частную производную $\frac{1}{\omega} \frac{\partial z}{\partial J_k}$, где ω — четырехмерный объем ячейки, а k — номер узла, в котором находится точка x . Дифференциальный оператор $\square - \kappa^2$ нужно заменить разностным оператором, матрицу которого мы обозначим через $\|R_{ik}\|$. Уравнение (4) примет вид

$$-i \sum_i R_{ik} \frac{\partial z}{\omega \partial J_k} + \lambda \frac{\partial^2 z}{\omega^2 (\partial J_i)^2} = J_i z. \quad (4')$$

Совершим преобразование Фурье $z = \int \exp[i \sum s_k J_k] \xi d^n s$. Тогда система (4') перейдет в $\frac{1}{\omega} \sum_k R_{ik} s_k \xi - \frac{\lambda}{\omega^2} s_2 \xi = i \frac{\partial \xi}{\partial s_k}$. Найдя отсюда s , получим

$$z = c \int \exp \left[i \sum s_k J_k + \frac{i\lambda}{\omega^2} \sum \frac{s_k^3}{3} - \frac{i}{2\omega} \sum_{i,k} R_{ik} s_i s_k \right] d s_1 \dots d s_n$$

* Как указали авторам Е. С. Фрадкин и акад. Л. Д. Ландау, функция z может быть истолкована как среднее значение по вакууму S матрицы, которая возникает, если в момент времени $-\infty$ включить внешний ток $J(x)$ и затем в момент $+\infty$ выключить внешний ток (взаимодействие при этом не выключается и, значит, вакуум понимается как вакуум при наличии взаимодействия).

или, обозначив $is_k = \omega t_k$, имеем окончательно:

$$z = c' \int \exp \left[\left(\sum t_k J_k - \lambda \sum \frac{t_k^3}{3} + \frac{i}{2} \sum R_{ik} t_i t_k \right) \omega \right] dt_1 \dots dt_n. \quad (5)$$

Значение этого интеграла однозначно определено выбором контура интегрирования на каждой комплексной плоскости интегрирования ti . Поскольку при больших $|t_k|$ сходимость определяется членами t_k^3 , то на каждой плоскости контур должен уходить в бесконечность в одном из трех секторов, в котором $\text{Re } t_k^3 > 0$, а именно: S_1 , где $|\arg t_k| < \pi/6$; S_2 , где $\pi/2 < \arg t_k < 5\pi/6$, и S_3 , где $7\pi/6 < \arg t_k < 3\pi/2$. Контуров, дающих различные ненулевые значения интеграла, есть три: идущих из S_1 в S_2 , из S_2 в S_3 и из S_3 в S_1 . Однако интеграл по третьему контуру равен сумме интегралов по двум другим, и поэтому достаточно ограничиться лишь двумя. Поскольку на каждой плоскости можно разные контуры выбирать независимо, мы получаем 2^{n+1} линейно независимых решений уравнения (4'). Можно показать, что всякое решение есть линейная комбинация этих решений. В случае одного переменного интеграл, аналогичный интегралу (5), есть интеграл Эйри (бесселева функция порядка $1/3$); поэтому в общем случае естественно назвать интеграл (5) функцией аналом Эйри. Для наших дифференциальных уравнений нам нужны еще начальные условия. Такими условиями будут следующие требования: при $J_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$) нужно потребовать, чтобы $\langle \psi_k \rangle = 0$, и, значит, при $J_k = 0$ имеем $dz/dJ_k = 0$.

Мы уже говорили, что всего контуров, дающих различные решения, имеется 2^{n+1} . Мы приведем соображения в пользу выбора определенных из этих контуров, после чего уже никакого произвола не останется. Для этого заметим, что мы выбираем контуры в каждой плоскости t_k , где индекс k означает номер точки x решетки в четырехмерном пространстве. Так как «усы» контура могут занимать лишь положения в трех различных секторах, то принимая, что при непрерывном изменении точки x контур меняется непрерывно, мы получим, что возможны только две существенно различных поверхности интегрирования в $(n+1)$ -мерном пространстве. Одна из них получается, когда все пути интегрирования на всех плоскостях состоят из контуров, соединяющих S_1 и S_2 , и вторая, когда все соединяют S_2 с S_3 . Решение, которое таким образом отбирается, есть линейная комбинация указанных двух решений. Постоянные подбираются так, чтобы при $J_k = 0$ мы имели $dz/dJ_1 = 0$, тогда остальные производные dz/dJ_k также обратятся в нуль.

Укажем, как обобщаются приведенные вычисления на случай произвольных полей. Рассмотрим в качестве примера взаимодействие произвольной бозе-частицы с электромагнитным полем. Произвольное релятивистски инвариантное уравнение первого порядка имеет вид

$$L_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\partial \psi_{\beta}}{\partial x_{\mu}} - ie A_{\mu} L_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta} + i \kappa \psi_{\alpha} = \eta_{\alpha},$$

$$\square A_{\mu} = s_{\mu} + J_{\mu},$$

где ток s_{μ} дается формулой

$$s_{\mu} = 1/2 (\psi_{\alpha}^{+} L_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta} + \psi_{\alpha} L_{\alpha\beta}^{\mu} \psi_{\beta}^{+}),$$

η_{α} — «источники»; J_{μ} — внешние токи. Если $\mathcal{L}$ — функция Лагранжа (действие) всей системы частиц + электромагнитное поле, то, вводя

функцию $z = \langle e^{-i\mathcal{L}} \rangle^{-1}$ и повторяя предыдущие выкладки для этого случая, мы получим систему линейных уравнений вида

$$L_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\delta z}{\delta \eta_{\beta}(x)} - ie L_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{\delta^2 z}{\delta \eta_{\beta}(x) \delta J_{\mu}(x)} + ix \frac{\delta z}{\delta \eta_{\alpha}(x)} = \eta_{\alpha}(x) z,$$

$$\square \frac{\delta z}{\delta J_{\mu}(x)} = J_{\mu}(x) z + \frac{1}{2} L_{\alpha\beta}^{\mu} \left(\frac{\delta^2 z}{\delta \eta_{\alpha}^{+} \delta \eta_{\beta}(x)} + \frac{\delta^2 z}{\delta \eta_{\alpha}(x) \delta \eta_{\beta}^{+}(x)} \right).$$

Здесь z есть, конечно, функционал относительно $\eta_{\alpha}(x)$ и $J_{\mu}(x)$. Решение задачи попрежнему получается в виде контурного интеграла, аналогичного прежнему, а именно

$$z = \int \exp \left[i \sum s_{\alpha, k} \eta_{\alpha, k}^{+} + s_{\alpha, k}^{+} \eta_{\alpha, k} + J_{\mu, k} t_{\mu, k} + \mathcal{L} \right] \prod ds_{\alpha, k} dt_{\mu, k};$$

здесь $\mathcal{L} = \mathcal{L}(s, t)$ — функция Лагранжа (действие), где вместо $\psi_{\alpha}(x)$, $A_{\mu}(x)$ подставлено $s_{\alpha, k}$, $t_{\mu, k}$; k — номер точки решетки, $\partial/\partial x_{\mu}$ заменено разностью. Отбор решения попрежнему производится из непрерывности контура относительно точки x и из начальных условий при отсутствии токов.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1. Матричный элемент любого эффекта получается как отношение производной некоторого порядка по внешним источникам от z к самому z , если после дифференцирования положить внешние поля равными нулю. Число дифференцирований по каждому полю равно числу внешних линий для частиц данного сорта.

2. Для случая ферми-полей нужно считать внешние источники антикоммутирующими, как это отмечалось Швингером в работе ⁽¹⁾.

Когда настоящая работа была доложена, авторам указали, что окончательные формулы имеют много точек соприкосновения с работой Фейнмана ⁽²⁾.

Авторы выражают благодарность акад. Л. Д. Ландау и Е. С. Фрадкину за ценные дискуссии по поводу этой работы.

Поступило
28 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Schwinger, Proc. Nat. Acad., 37, No. 7, 452 (1951). ² R. P. Feynman, Phys. Rev., 80, No. 3, 440 (1950).