

А. Ф. КРЮЧИН

О СОПРОТИВЛЕНИИ РОМБОВИДНОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ОКОЛОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 21 II 1954)

Рассматривается симметричное обтекание ромбовидного профиля установившимся сверхзвуковым потоком газа при отсутствии трения и теплопередачи с отсоединенной линией сильного разрыва в предположении, что скорость потока на бесконечности мало превосходит скорость звука и профиль имеет малую относительную толщину. Расчет потока у переднего ската KB (см. рис. 1) был дан в (4). Задача обтекания заднего ската клина в плоскости «годографа» сводится к решению уравнения

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (E)$$

в области TRN (см. рис. 2) при известных значениях решения на RT и NT .

В качестве основных переменных выберем $x = \frac{v}{\theta a_*}$ и $y = \frac{\kappa+1}{\theta^{2/3}} \left(1 - \frac{u}{a_*}\right)$. Здесь u , v — компоненты вектора скорости на оси x_1 и y_1 , соответственно, в плоскости потока;

a_* — критическая скорость звука; θ — половина угла раствора клина; κ — постоянная, для воздуха $\kappa = 1,408$.

Осуществим продолжение течения в сверхзвуковую область за предельную характеристику AC . Около угловой точки профиля B происходит поворот сверхзвукового потока. В плоскости «годографа» (x , y) точке B будет соответствовать характеристика BT , вдоль которой решение $z = 0$.

Проведем из точки A характеристику второго свойства и будем

в дальнейшем рассматривать только область $BANB$ (рис. 1). Характеристика AN пересечет продолжение заднего ската профиля в точке N ,

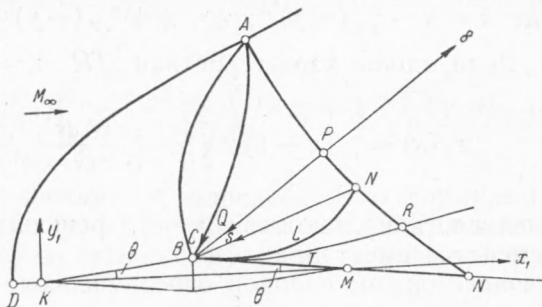


Рис. 1

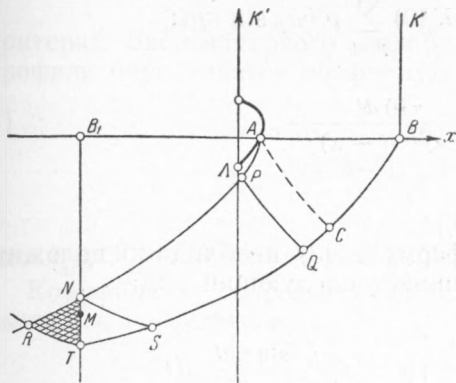


Рис. 2

которая будет лежать правее (выше) точки M у достаточно большого семейства профилей, имеющих сравнительно короткую заднюю часть. Области $BANB$ плоскости потока (x, y) (рис. 1) соответствует область $BTRNAB$ плоскости «годографа» (x, y) (рис. 2).

На рис. 1 и 2 соответственные точки обозначены одинаковыми буквами. Часть области $BTRNAB$, а именно TRN , будет двулистной. В точках линии NLB вектор скорости совпадает по направлению с задним скатом профиля. Для определения давления по заднему скату профиля достаточно найти решения на характеристике первого семейства TR . Затем по найденному решению на TR и заданному решению на заднем скате профиля TN найдем решение в области TRN . Линией сильного разрыва, которая образуется в области $BANB$, пренебрегаем вследствие ее слабого влияния на распределение давления по заднему скату профиля.

Решение на характеристике TR найдется, если использовать формулу задачи Коши с начальными данными на линии параболичности ⁽¹⁾, которая в характеристических переменных (ξ, η) запишется:

$$z(\xi, \eta) = \gamma_1 (\eta - \xi)^{2/3} \int_{\xi}^{\eta} \frac{\tau(s) ds}{(s - \xi)^{5/6} (\eta - s)^{5/6}} - \gamma_2 \int_{\xi}^{\eta} \frac{v(s) ds}{(s - \xi)^{1/6} (\eta - s)^{1/6}},$$

где $\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$; $\eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$; $\gamma_1 = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)}$; $\gamma_2 = (\frac{3}{4})^{2/3} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma^2(5/6)}$.

Если вдоль характеристики TR $\xi = \alpha$, то решение на ней будет

$$z_{\alpha}(x) = \gamma_1 (x - \alpha)^{2/3} \int_{\alpha}^x \frac{\tau(s) ds}{(s - \alpha)^{5/6} (x - s)^{5/6}} - \gamma_2 \int_{\alpha}^x \frac{v(s) ds}{(s - \alpha)^{1/6} (x - s)^{1/6}}. \quad (1)$$

Аналогично, полагая $\eta = \beta$, решение на характеристике второго семейства имеет вид:

$$z_{\beta}(x) = \gamma_1 (\beta - x)^{2/3} \int_x^{\beta} \frac{\tau(s) ds}{(s - x)^{5/6} (\beta - s)^{5/6}} - \gamma_2 \int_x^{\beta} \frac{v(s) ds}{(s - x)^{1/6} (\beta - s)^{1/6}} = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) после преобразований получается следующая формула, связывающая решение на характеристике первого семейства (RT)

с известным значением ⁽⁴⁾ $v(t) = \pi^{1/2} \lambda'(0) \sum_{p=1}^n p^{1/2} a_p \sin \pi p t$:

$$z_{\alpha}(x) = \gamma_* \int_x^{\beta} \frac{v(t) dt}{(t - \alpha)^{1/6} (t - x)^{1/6}}, \quad (3)$$

где $\gamma_* = \gamma_1 \frac{\Gamma^2(1/6)}{\Gamma(1/3)}$, $\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6) \Gamma(2/3)}$.

Для ромбовидного профиля в формуле (3) необходимо положить $\alpha = -3$, $\beta = 1$, после чего она принимает следующий вид:

$$z_{\alpha}(x) = \gamma_* \lambda'(0) \pi^{1/2} \left\{ \sum_{p=1}^n \frac{p^{1/2} a_p}{5} \left[(t - x)^{5/6} \frac{\sin \pi p t}{(t + 3)^{1/6}} dt - \right. \right. \\ \left. \left. - 6p \int_x^1 (t - x)^{5/6} \frac{\cos \pi p t}{(t + 3)^{1/6}} dt \right] \right\}. \quad (4)$$

В силу малости отрезка TN по сравнению с TB заменим в уравнении (Е) переменный коэффициент y постоянным значением — ординатой точки R (рис. 2). Тогда решение уравнения (Е) запишется в виде:

$$z(x, y) = f_1(x - \sqrt{|y_R|} y) + f_2(x + \sqrt{|y_R|} y). \quad (5)$$

Произвольные функции f_1 и f_2 определяются по известным значениям решения на характеристике TR и прямой TN . Если обозначить через $F(\eta)$ найденное решение на характеристике TR , выражение (10) запишется:

$$z(\xi, \eta) = F(\eta) - F(2x_T - \xi),$$

где x_T — абсцисса точки T .

Так как вдоль TN решение равно нулю, то

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_T} = 2F'(x_T + \sqrt{|y_R|} y).$$

Из уравнений околзвукowego потока (3)

$$\frac{\partial x_1}{l_* \partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{l_* \partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

находим

$$\frac{x_1}{l_*} = 1 + \frac{2}{\sqrt{|y_R|}} y F(x_T + \sqrt{|y_R|} y) \Big|_{y_T}^y - \frac{2}{\sqrt{|y_R|}} \int_{y_T}^y F(x_T + \sqrt{|y_R|} y) dy. \quad (7)$$

Задаваясь различными значениями y , определяем по формуле (7) x_1/l_* ; из построенного графика $y = y(x_1/l_*)$ находим для заданных x_1/l_* величину y . Затем определяем коэффициент давления, для которого в пределах закона околзвукowego подобия можно записать следующую формулу:

$$\bar{p}_{(x_1)} + \frac{4(y - \Lambda)}{(\kappa + 1)\Lambda} (1 - M_\infty) [1 + 2(1 - M_\infty) + \dots],$$

где

$$\Lambda = \frac{2(1 - M_\infty)}{[(\kappa + 1)\theta]^{1/2}}$$

критерий околзвукowego подобия. Допустимая длина задней части профиля определяется по формуле

$$x_{1N} - x_{1B} = 2l_* \int_{y_T}^{y_N} y F'(x_T + \sqrt{|y_R|} y) dy,$$

где x_{1N} , x_{1B} — абсциссы точек N и B .

Коэффициент сопротивления c_x ромбовидного профиля может быть вычислен по формуле:

$$c_x = \frac{Q}{\rho_\infty \frac{u_\infty^2}{2} b} = \frac{2\theta^{3/2}}{l_* (\kappa + 1)^{1/2}} \int_0^2 (y - \Lambda) x dx_1, \quad (8)$$

где b — хорда профиля; ρ_∞ — плотность потока на бесконечности;

$$Q = \int p \sin \varphi ds;$$

здесь p — давление в данной точке профиля; φ — местный угол наклона профиля; ds — элемент дуги профиля.

Если использовать уравнения околзвукowego потока (6) и связь между y и x на контуре профиля, то

$$dx_1 = l_* \left[y \frac{\partial z}{\partial x} - x'(y) \frac{\partial z}{\partial y} \right] dy. \quad (9)$$

После подстановки (9) в (8) и некоторых преобразований находим:

$$c_x = \frac{2\theta^{1/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \left[\int_{+\infty}^0 (y - \Lambda) y \frac{\partial z}{\partial x} dy - \int_{y_T}^{y_M} (y - \Lambda) y \frac{\partial z}{\partial x} dy \right],$$

где y_T , y_M — ординаты точек T и M (рис. 2).

Если учесть, что (4)

$$z = \sum_{p=1}^n a_p \lambda (\pi^{1/2} p^{1/2} y) \sin \pi p x, \quad \lambda'' (\pi^{1/2} p^{1/2} y) = \pi^{1/2} p^{1/2} y \lambda (\pi^{1/2} p^{1/2} y),$$

то

$$c_x = \frac{2\theta^{1/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} \left[\frac{1 + \Lambda \lambda'(0)}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n (-1)^p \frac{a_p}{p^{1/2}} - \int_{y_T}^{y_M} (y - \Lambda) y \frac{\partial z}{\partial x} dy \right] = \frac{\theta^{1/2}}{(\kappa + 1)^{1/2}} f(\Lambda),$$

где $f(\Lambda)$ — функция только критерия околзвукowego подобия.

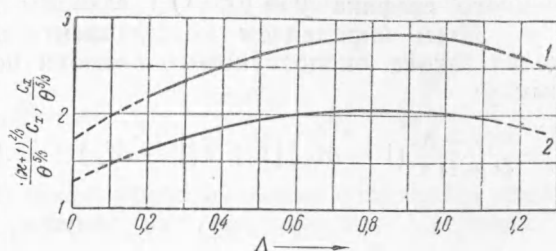


Рис. 3. Зависимость критерия околзвукowego подобия Λ от величины $\frac{(\kappa + 1)^{1/2}}{\theta^{1/2}} c_x(\Lambda)$ и $\frac{c_x}{\theta^{1/2}}$ (2) при $\kappa = 1,4$ для ромба

Для ромбовидного профиля в результате численных расчетов был построен график зависимости коэффициента лобового сопротивления от критерия околзвукowego подобия, который приведен на рис. 3.

Поступило
22 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, 1947. ² К. И. Бабенко, К теории уравнений смешанного типа, Докторская диссертация, М., 1951. ³ Л. В. Овсянников, Вестн. ЛГУ, № 6 (1952). ⁴ А. Ф. Крючин, ДАН, 97, № 1 (1954).